数理科学

福岡県立鞍手高等学校数学科　編

目 次

第1章　統計的な推測

1　確率分布

1.1　確率変数と確率分布

2 枚の硬貨を投げるという試行において, 表が出る硬貨の数を X とすると, X の値は試行の結果によって定まる。このように, 試行の結果によって値が定まる変数を**確率変数** (random variable) という。確率変数の値と, その値をとる確率の対応関係を**確率分布** (probability distribution) という。

例 1.1: 確率分布

2 枚の硬貨を投げるときに表の出る枚数 X の分布は右のような表で表される。

X	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

確率変数 X について, $X = a$ となる確率を $P(X = a)$, $a \leqq X \leqq b$ となる確率を $P(a \leqq x \leqq b)$ などのように表す。

例 1.2: 確率変数と確率

例 1.1 における X について

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X \geqq 1) = \frac{3}{4}$$

である。

1.2 確率変数の期待値・分散・標準偏差

下表のようなくじを考える。

	1 等	2 等	3 等	はずれ	計
賞金（円）	10,000	1,000	100	0	
本数	1	5	50	944	1,000

このくじの賞金総額をくじの本数で割ると,

$$\frac{10000\cdot 1+1000\cdot 5+100\cdot 50+0\cdot 944}{1000}=20\,(\text{円}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

この金額は, くじ 1 本あたりの賞金額と考えられる。式 (1.1)は, 左辺を変形して,

$$10000\cdot\frac{1}{1000}+1000\cdot\frac{5}{1000}+100\cdot\frac{50}{1000}+0\cdot\frac{944}{1000}=20\,(\text{円}) \quad \cdots\cdots\cdots (1.2)$$

と表すこともできる。このくじを 1 本引くときに, あたる賞金を X とすると, X は確率変数であり, X の分布は下表のようになる。

X	10000	1000	100	0	計
確率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{944}{1000}$	1

式 (1.2) の左辺は, 賞金の額とその賞金を得る確率の積をすべて加えたものになっている。このように計算した値を, この確率変数 X の期待値という。一般に, 確率変数の期待値を次のように定義する。

定義 1.1: 期待値の定義

確率変数 X が右表のような分布に従うとする。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$\boldsymbol{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$$

を X の**期待値** (expectation), または**平均** (mean) という。

例題 1.1: 硬貨投げにおける期待値

4 枚の硬貨を投げて表が出る枚数を X とするとき, X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

解答.

X の分布は右表のようになる。よって, X の期待値 $E(X)$ は

X	0	1	2	3	4	計
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

練習 1.1: カードを引くときの期待値

0 から 4 までの数字の書かれたカードが 1 枚ずつある。このカードの中から 1 枚のカードを引いたとき, 引いたカードに書かれている数を Y とする。Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ。

例題 1.1 の X と練習 1.1 の Y について, 期待値は同じ値となる。しかし, 確率分布表を見ると, X よりも Y の方が, 期待値から離れた値が出やすいことに気づくだろう。このようなとき, X よりも Y の方が散らばりの度合いが大きいといえる。

確率変数の値の散らばりを表すための量として, 分散と標準偏差を次のように定義する。

定義 1.2: 分散と標準偏差

確率変数 X が右表のような分布に従うとする。$E(X) = m$ とするとき,

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$\boldsymbol{V(X) = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n}$$

を X の**分散** (variance) といい,

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

を X の**標準偏差** (standard deviation) という。

例題 1.2: 硬貨投げの分散と標準偏差

例題 1.1 の X について, X の分散 $V(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

解答.
例題 1.1 より

$$E(X) = 2$$

である。X の値と, それに対応する $X-2$, $(X-2)^2$ の値, および確率は右表のようになるから,

X	0	1	2	3	4	計
$X-2$	-2	-1	0	1	2	
$(X-2)^2$	4	1	0	1	4	
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$V(X) = 4 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 1$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

練習 1.2: カード引きの分散と標準偏差

練習 1.1 の Y について, 分散 V(Y), 標準偏差 σ (Y) を求めよ。

公式等 1.1: 分散公式

分散について, 次の性質が成り立つ。

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2}$$

証明. 定義 1.2 における確率変数 X について,

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots + (x_n - m)^2 p_n \\ &= (x_1^2 - 2x_1 m + m^2) p_1 + (x_2^2 - 2x_2 m + m^2) p_2 \\ &\qquad\qquad + \cdots + (x_n^2 - 2x_n m + m^2) p_n \\ &= (x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n) \\ &\qquad - 2(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) m + m^2 (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n &= E(X^2), \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n &= m, \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n &= 1 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - 2m \cdot m + m^2 = E(X^2) - m^2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

証明終

例題 1.3: サイコロ投げの分散

さいころを投げて出た目の数を X とするとき, X の分散 $V(X)$ を求めよ。

解答.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

であるから

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

練習 1.3: 硬貨投げの分散

3 枚の硬貨を投げて表が出る枚数を X とするとき, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

確率変数 X に対して, $Y = aX + b$ とすると, Y も確率変数となる。このような確率変数 Y を考える際には, 次の性質が役立つ (証明はコラム 1.1)。

公式等 1.2: $aX + b$ の期待値・分散・標準偏差

確率変数 X について, $Y = aX + b$ とすると

$$\boldsymbol{E(Y) = aE(X) + b,\ V(Y) = a^2V(X),\ \sigma(Y) = |a|\sigma(X)}$$

例題 1.4: 硬貨投げの賞金の期待値

50 円玉 4 枚を投げて表が出た硬貨と 10 円玉 2 枚が賞金としてもらえるとするとき, もらえる賞金の期待値と分散を求めよ。

解答. 表が出る 50 円玉の枚数を X とすると, 例題 1.1 と例題 1.2 の結果から

$$E(X) = 2, \quad V(X) = 1$$

であるから, 賞金の期待値は

$$E(50X + 20) = 50E(X) + 20 = 50 \cdot 2 + 20 = 120$$

分散は

$$V(50X + 20) = 50^2V(X) = 50^2 \cdot 1 = 2500$$

練習 1.4: 硬貨投げの賞金の期待値

500 円玉を 4 枚を投げて, 表が出た硬貨と 100 円玉 3 枚が賞金としてもらえるとするとき, 賞金の期待値と分散を求めよ。例題 1.1 と例題 1.2 の結果を用いてよい。

1.3　同時分布

赤玉 1 個, 白玉 2 個, 黒玉 3 個が入った袋から 2 個の玉を同時に取り出す試行について, 取り出した赤玉の個数を X, 白玉の個数を Y とする。たとえば, $X = 1$ かつ $Y = 0$ となる確率は

$$\frac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{1}{5}$$

であり, 考えられるすべての X, Y の組について確率を求めると, 右表のようになる。このように, 複数の確率変数とその確率との対応を**同時分布** (joint probability distribution) という。

Y \ X	0	1	計
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{15}$
計	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

X と Y の確率分布はそれぞれ右表のようになる。これより $E(X) = \frac{1}{3}$, $E(Y) = \frac{2}{3}$ であることが分かる。

また, 取り出した赤玉の個数と白玉の個数の和を Z (すなわち $Z = X + Y$) とすると, Z の確率分布は右表のようになる。これより $E(Z) = 1$ であり,

$$E(Z) = E(X) + E(Y)$$

が成り立つ。一般に, 次の性質が成り立つ (証明はコラム 1.2)。

X	0	1	計
確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	0	1	2	計
確率	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

Z	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

公式等 1.3: 確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y について,

$$\boldsymbol{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

一方, 取り出した赤玉の個数と白玉の個数の積を W (すなわち $W = XY$) とすると, W の分布は右表のようになり, $E(W) = \frac{2}{15}$ であるが,

$$E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

W	0	1	計
確率	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

であり, $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ は一般的には成り立たない。

$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つのに十分な条件として, 確率変数の独立という性質を次のように定義する。

定義 1.3: 確率変数の独立

2 つの確率変数 X, Y について

$$\boldsymbol{P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)}$$

が a, b の値にかかわらず成り立つとき, X と Y は**独立** (independent) であるという。

一般に, 次の性質が成り立つ（証明はコラム 1.2）。

公式等 1.4: 確率変数の積の期待値

X と Y が独立であるとき

$$\boldsymbol{E(XY) = E(X) \cdot E(Y)}$$

さらに, 分散について次の性質も成り立つ（証明はコラム 1.2）。

公式等 1.5: 確率変数の和の分散

X と Y が独立であるとき

$$\boldsymbol{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$$

S の結果によって定まる確率変数 X と T の結果によって定まる確率変数 Y について, 2 つの試行 S, T が独立であれば, X と Y は独立である。

例題 1.5: サイコロの目の和の期待値と分散

大小 2 個のさいころを投げて出た目をそれぞれ X, Y とするとき, 期待値 $E(X+Y)$ と分散 $V(X+Y)$ を求めよ。

解答. 例題 1.3 の結果より

$$E(X)=E(Y)=\frac{7}{2},\quad V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$$

であるから,

$$E(X+Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$

さらに, X と Y は独立であるから,

$$V(X+Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

3 つ以上の確率変数についても同様の性質が成り立つ。例えば, 3 つの確率変数 X, Y, Z について

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

が成り立つ。また, 3 つの以上の確率変数の独立についても同様に定義し, 独立であれば同様の性質が成り立つ。例えば,

$$P(X=a,Y=b,Z=c)=P(X=a)\cdot P(Y=b)\cdot P(Z=c)$$

が a, b, c の値にかかわらず成り立つとき, X, Y, Z は互いに独立であるといい, このとき,

$$\begin{aligned} E(XYZ)&=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z),\\ V(X+Y+Z)&=V(X)+V(Y)+V(Z) \end{aligned}$$

が成り立つ。

練習 1.5: サイコロの目の和の期待値と分散

大中小 3 個のさいころを投げて出た目をそれぞれ X, Y, Z とするとき, 期待値 $E(X+Y+Z)$, 分散 $V(X+Y+Z)$ を求めよ。例題 1.3 の結果を用いてよい。

コラム 1.1: 公式等 1.2 の証明

証明.

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(aX+b) \\
&= (ax_1+b)p_1 + (ax_2+b)p_2 + \cdots + (ax_n+b)p_n \\
&= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n) + b(p_1+p_2+\cdots+p_n) \\
&= aE(X)+b
\end{aligned}
$$

また, $E(X)=m$ とすると, $E(aX+b)=am+b$ であるから,

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= V(aX+b) \\
&= \{(ax_1+b)-(am+b)\}^2p_1 + \{(ax_2+b)-(am+b)\}^2p_2 \\
&\qquad + \cdots\cdots + \{(ax_n+b)-(am+b)\}^2p_n \\
&= \{a(x_1-m)\}^2p_1 + \{a(x_2-m)\}^2p_2 + \cdots + \{a(x_n-m)\}^2p_n \\
&= a^2(x_1-m)^2p_1 + a^2(x_2-m)^2p_2 + \cdots + a^2(x_n-m)^2p_n \\
&= a^2\{(x_1-m)^2p_1 + (x_2-m)^2p_2 + \cdots + (x_n-m)^2p_n\} \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)
$$

証明終

コラム 1.2: 公式等 1.3・1.4・??の証明

一般の場合についての証明は煩雑になるため, X と Y が右表のような分布に従う場合について証明する。

	y_1	y_2	計
x_1	r_{11}	r_{12}	p_1
x_2	r_{21}	r_{22}	p_2
x_3	r_{31}	r_{32}	p_3
計	q_1	q_2	1

$$\begin{aligned}E(X+Y) &= (x_1+y_1)r_{11}+(x_1+y_2)r_{12}\\ &\quad +(x_2+y_1)r_{21}+(x_2+y_2)r_{22}\\ &\quad +(x_3+y_1)r_{31}+(x_3+y_2)r_{32}\\ &= x_1(r_{11}+r_{12})+x_2(r_{21}+r_{22})+x_3(r_{31}+r_{32})\\ &\quad +y_1(r_{11}+r_{21}+r_{31})+y_2(r_{12}+r_{22}+r_{32})\\ &= x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+y_1q_1+y_2q_2\\ &= E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

また, X と Y が独立のとき, 確率分布は右表のようになるから,

	y_1	y_2	計
x_1	p_1q_1	p_1q_2	p_1
x_2	p_2q_1	p_2q_2	p_2
x_3	p_3q_1	p_3q_2	p_3
計	q_1	q_2	1

$$\begin{aligned}E(XY) &= x_1y_1\cdot p_1q_1+x_1y_2\cdot p_1q_2\\ &\quad +x_2y_1\cdot p_2q_1+x_2y_2\cdot p_2q_2\\ &\quad +x_3y_1\cdot p_3q_1+x_3y_2\cdot p_3q_2\\ &= (x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)y_1q_1+(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)y_2q_2\\ &= (x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)(y_1q_1+y_2q_2)\\ &= E(X)E(Y)\end{aligned}$$

また, これより

$$\begin{aligned}V(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big)-\{E(X+Y)\}^2\\ &= E\big(X^2+2XY+Y^2\big)-\{E(X)+E(Y)\}^2\\ &= E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)\\ &\quad -\big[\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2\big]\\ &= E(X^2)+2E(X)E(Y)+E(Y^2)\\ &\quad -\{E(X)\}^2-2E(X)E(Y)-\{E(Y)\}^2\\ &= \big[E(X^2)-\{E(X)\}^2\big]+\big[E(Y^2)-\{E(Y)\}^2\big]\\ &= V(X)+V(Y)\end{aligned}$$

2 二項分布と正規分布

2.1 二項分布

サイコロを 6 回投げるとき, 3 の倍数の目が出る回数を X とすると, 反復試行の確率の公式により

$$P(X=4) = {}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{20}{243}$$

である。実際に, たくさんの製品の中から製品を何度も取り出して, 不良品が取り出される回数を考えるなど, このような確率変数を考える機会は多い。ここでは, このように, ある試行を繰り返したときに, ある事象が起こる回数の分布について考える。

定義 1.4: 二項分布

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p であるような試行を n 回行う反復試行において, 事象 A が起こる回数を X とするとき, X の分布は次表のようになる。この分布を**二項分布** (binomial distribution) といい, $\boldsymbol{B(n,p)}$ で表す。

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	n	計
確率	$(1-p)^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p^1(1-p)^{n-1}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$	$\cdots$	p^n	1

二項分布の期待値と分散について, 次が成り立つ。

公式等 1.6: 二項分布の期待値と分散

X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき

$$\boldsymbol{E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)}$$

証明. 定義 1.4 の試行について考える。

X_r	0	1	計
$X_r - p$	$-p$	$1-p$	
確率	$1-p$	p	1

$r = 1, 2, 3, \cdots, n$ に対して, r 回目に A が起これば $X_r = 1$, A が起こらなければ $X_r = 0$ となるような確率変数 X_r を考え

ると,

$$E(X_r) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$
$$V(X_r) = (-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p(1-p)$$

となる。ここで, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ であるから,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= p + p + \cdots + p = np \end{aligned}$$

さらに, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立であるから,

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) \\ &= p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p) \end{aligned}$$

証明終

例題 1.6: サイコロを繰り返し投げたときの期待値と分散

1 個のサイコロを 72 回投げて, 1 の目が出る回数を X とするとき, X の期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

解答. X は二項分布 $B\left(72, \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。したがって,

$$E(X) = 72 \cdot \frac{1}{6} = 12$$
$$V(X) = 72 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 10$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10}$$

練習 1.6: 硬貨投げを繰り返したときの期待値と分散

1 枚の硬貨を 40 回投げて, 表が出る回数を X とする。X の期待値と分散および標準偏差を求めよ。

2.2　連続型確率変数と確率密度関数

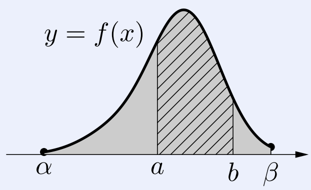
ある集団の中から 1 人の人を選ぶという試行について, 選んだ人の身長を X とすると, X は確率変数である。このように, 連続な値をとる確率変数を**連続**

型確率変数 (continuous type random variable) という。

連続型確率変数の分布は, これまでのように確率分布表に表すことができない。そこで, 次のような関数を考える。

定義 1.5: 確率密度関数

連続型確率変数 X について, 次の性質を満たす関数 $f(x)$ を X の**確率密度関数** (probability density function) という。



[1] 常に $f(x) \geqq 0$

[2] 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積が $P(a \leqq X \leqq b)$ に等しい

[3] X のとりうるすべての値の範囲が $u \leqq X \leqq v$ のとき $y = f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x = u$, $x = v$ で囲まれる部分の面積は 1

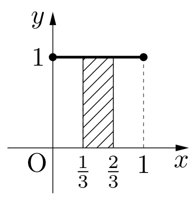
また, このとき, 曲線 $y = f(x)$ を**分布曲線** (distribution curve) という。

例題 1.7: 一様分布

確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられるとき, 確率 $P\left(\dfrac{1}{3} \leqq X \leqq \dfrac{2}{3}\right)$ を求めよ。

解答. 求める確率は右図の斜線部分の面積に等しいから

$$P\left(\frac{1}{3} \leqq X \leqq \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \underline{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$



なお, 例題 1.7 の $f(x)$ は常に $f(x) \geqq 0$ を満たし, グラフと x 軸, および 2 直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれる部分の面積は 1 であるから, 確率密度関数の性質 [1] と [3] を満たしている。この分布を**一様分布**という。

練習 1.7: 1 次関数で表される分布

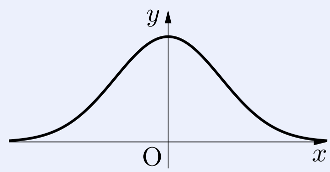
確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = x$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$ で与えられるとき, $P(X \geqq 1)$ を求めよ。

2.3　正規分布

定義 1.6: 正規分布

m, σ を定数とする。X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



で表されるような分布を, **正規分布** (normal distribution) といい, $\boldsymbol{N(m, \sigma^2)}$ で表す。ここで, e は無理数の定数で, $e \fallingdotseq 2.718$ である。また, 曲線 $y = f(x)$ を**正規分布曲線** (normal distribution curve) という。

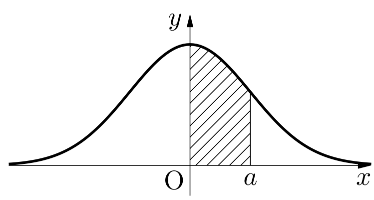
公式等 1.7: 正規分布の分散と期待値

X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき

$$\boldsymbol{E(X) = m, \quad V(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma}$$

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき,

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$



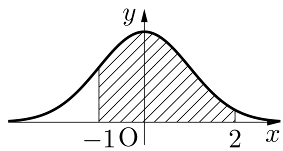
とすると, Z は $N(0, 1)$ に従う。正規分布 $N(0, 1)$ を**標準正規分布** (standard normal distribution) という。巻末には標準正規分布に従う確率変数 Z に対して, $P(0 \leqq Z \leqq a)$ の値 (右上図の斜線部分の面積) を表にした「正規分布表」を掲載している。

例題 1.8: 正規分布表を用いた確率の計算

確率変数 X が正規分布 $N(1,3^2)$ に従うとき, $P(-2 \leqq X \leqq 7)$ を求めよ。

解答. $Z = \dfrac{X-1}{3}$ とすると, Z は標準正規分布に従い, $-2 \leqq X \leqq 7$ のとき $-1 \leqq Z \leqq 2$ であるから,

$$\begin{aligned} &P(-2 \leqq X \leqq 7) = P(-1 \leqq Z \leqq 2) \\ &= P(-1 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 1) + P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$



練習 1.8: 正規分布表を用いた確率の計算

確率変数 X が正規分布 $N(5,2^2)$ に従うとき, 次の確率を求めよ。

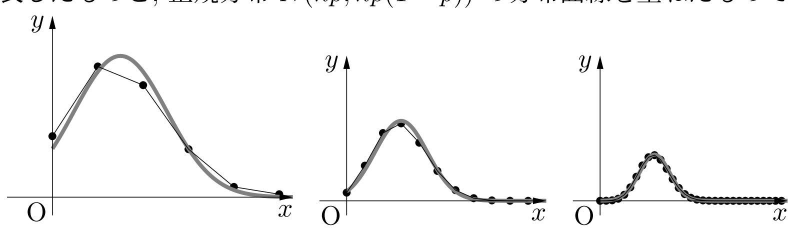
(1) $P(5 \leqq X \leqq 7)$ (2) $P(-1 \leqq X \leqq 11)$

練習 1.9: 平均値と標準偏差からある範囲に属するものの割合を求める

全国の高校 1 年生女子の身長の分布は平均値 156cm, 標準偏差 5cm の正規分布とみなせるという。このとき, 身長が 151cm 以上 161cm 以下の生徒は全体のおよそ何%いると考えられるか。

2.4 二項分布の正規分布による近似

確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき, X の平均は np, 分散は $np(1-p)$ である。次の図は, $n=5,10,30$ の各場合について, X の分布を折れ線グラフで表したものと, 正規分布 $N(np, np(1-p))$ の分布曲線を重ねたものである。



図からわかるように, n の値を大きくしていくと, 二項分布 $B(n, p)$ は正規分布 $N(np, np(1-p))$ に近づいていくことがわかる。一般に次のことがいえる。

公式等 1.8: 二項分布の正規分布による近似

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとする。n が十分に大きいとき, X は近似的に正規分布 $\boldsymbol{N(np, np(1-p))}$ に従うとしてよい。

例題 1.9: 二項分布の正規分布による近似

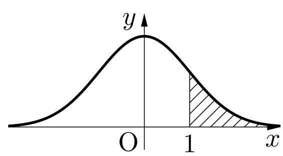
1 個のさいころを 720 回投げるとき, 1 の目が 130 回以上出る確率を正規分布表を用いて近似的に求めよ。

解答. 1 の目が出る回数を X とすると, X は二項分布 $B\left(720, \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから,

$$E(X) = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120, \quad V(X) = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 100$$

よって, X は近似的に正規分布 N(120,100) に従うとしてよい。

このとき $Z = \dfrac{X-120}{10}$ は近似的に標準正規分布 N(0,1) に従うから



$$\begin{aligned} P(X \geqq 130) &= P(Z \geqq 1) \\ &= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

練習 1.10: 二項分布の正規分布による近似

1 個のさいころを 450 回投げるとき, 5 以上の目が 160 回以上出る確率を正規分布表を用いて近似的に求めよ。

コラム 1.3: 確率密度関数と積分

数学 II で学ぶ「積分」の記号を用いると，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表される。この記号を用いると，確率密度関数の定義 (定義:1.5) の性質は，

[1] $f(x) \geqq 0$

[2] $P(a \leqq X \leqq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

[3] $\displaystyle\int_u^v f(x)dx = 1$

で表される。
また，確率密度関数が $f(x)$ で表される確率分布 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = \int_u^v xf(x)dx$$

と定義される。さらに，この期待値を m とするとき，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X) = \int_u^v (x-m)^2 f(x)dx$$

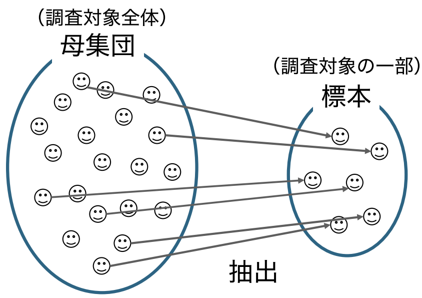
と定義される。

3　標本

3.1　全数調査と標本調査

全国の高校 1 年生の身長の平均値を求めるためには, 全国の高校 1 年生全員の身長を測らなければならないが, この調査には大変な時間と手間がかかる。そこで, 全国の高校 1 年生の一部を抜き出して, その身長の平均を調べるということがある。調査対象全体のデータを集めることを**全数調査** (complete survey) という。全数調査が困難な場合, 調査対象から一部を抜き出して調べる**標本調査** (sample survey) を行う。

3.2　母集団と標本



標本調査を行う際, 調査対象全体のことを**母集団** (population) といい, 母集団に属する対象の一つひとつを**個体**という。母集団に属する個体の総数を**母集団の大きさ**という。

標本調査において, 母集団から抜き出した一部の調査対象を**標本** (sample) といい, 母集団から標本を抜き出すことを**抽出** (sampling) という。標本に属する個体の総数を**標本の大きさ** (sample size) という。

標本調査によって母集団の性質を推測するためには, 標本を抽出する際に偏りなく抽出することが重要である。各個体を等しい確率で抽出する方法を**無作為抽出** (random sampling) といい, この方法で選ばれた標本を**無作為標本** (random sample) という。無作為な抽出を行うためには乱数表や乱数さい (正 20 面体の 20 個の面に 0 から 9 までの数字が 2 回ずつ刻まれているさいころ), コンピューターで発生させた疑似乱数などが使用される。

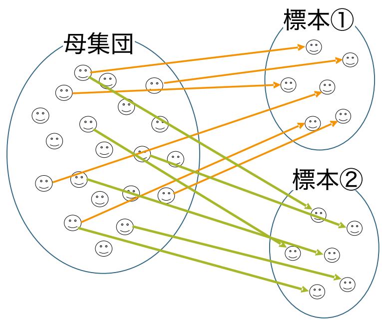
また, 抽出には, 毎回元に戻しながら 1 個ずつ抽出する**復元抽出** (sampling with replacement) と, 元に戻さずに抽出する**非復元抽出** (sampling without replacement) がある。

3.3 母集団分布

母集団から抽出した1個の個体の変量(例えば身長)の値を X とすると, X は確率変数である。このとき, X の確率分布を**母集団分布** (population distribution) といい, X の平均, 分散, 標準偏差をそれぞれ, **母平均** (population mean), **母分散** (population variance), **母標準偏差** (population standard deviation) という。

3.4 標本平均とその分布

標本の変量の平均を**標本平均** (sample mean) という。例えば, 右図の標本①の標本平均と標本②の標本平均は同じ値になるとは限らない。よって, 標本平均を $\overline{X}$ とすると, $\overline{X}$ は標本を抽出するという試行の結果によって定まる確率変数であり, その期待値, 分散, 標準偏差は次のようになる (証明はコラム 1.4)。



公式等 1.9: 標本平均の期待値・分散・標準偏差

母平均 m, 母標準偏差 σ を持つ母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\overline{X}$ について

$$\boldsymbol{E(\overline{X}) = m, \quad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

公式等 1.9 が成り立つのは, 厳密には復元抽出の場合だが, 標本の大きさが十分に大きいときは非復元抽出でも同様に扱う。

さらに, 標本平均 $\overline{X}$ について, 次の性質が知られている。

公式等 1.10: 標本平均の分布

母平均 m, 母標準偏差 σ を持つ母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\overline{X}$ は, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{m}, \dfrac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{n}}\right)$ に従うとみなすことができる。

上記の性質は, 母集団の分布によらない（母集団の分布が正規分布でなくてよい）。なお, 母集団の分布が正規分布のときは, n が大きくなくても, $\overline{X}$ は正規分布に従うことが知られている。

例題 1.10: 標本平均の分布

母平均 50, 母標準偏差 40 である母集団から, 大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき, この標本の標本平均 $\overline{X}$ が 46 以上, 54 以下となる確率を, 正規分布表を利用して求めよ。

解答. $\dfrac{40}{\sqrt{100}} = 4$ であり, 標本の大きさ 100 は十分に大きいから, $\overline{X}$ は正規分布 $N(50, 4^2)$ に従うとみなすことができる。

$Z = \dfrac{\overline{X} - 50}{4}$ とすると, Z は標準正規分布に従うから, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(46 \leqq \overline{X} \leqq 54) &= P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 2 \times P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 2 \times 0.3413 = \underline{0.6826} \end{aligned}$$

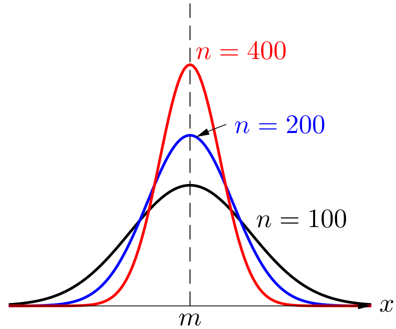
……**(答)**

練習 1.11: 標本平均の分布

母平均 50, 母標準偏差 40 である母集団から, 大きさ 400 の無作為標本を抽出するとき, この標本の標本平均 $\overline{X}$ が 46 以上, 54 以下となる確率を, 正規分布表を利用して求めよ。

3.5 大数の法則

母平均 50, 母標準偏差 40 の母集団から大きさ n の標本を抽出し, 標本平均を $\overline{X}$ とすると, $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(50, \dfrac{40^2}{n}\right)$ に従う。$n = 100, 200, 400$ の各場合について, この正規分布を表す分布曲線を図示すると, 右のようになる。



ここで, 標本平均 $\overline{X}$ が母平均 50 に近い値を取る確率, 例えば, $|\overline{X} - 50| \leqq 4$ となる確率を考えてみる。

$$|\overline{X} - 50| \leqq 4 \iff 46 \leqq \overline{X} \leqq 54$$

であるから, $n = 100$ のときは, 例題 1.10 の結果と同じであり,

$$P(|\overline{X} - 50| \leqq 4) = 0.6826$$

同様に, $n = 200$ のとき ($\sqrt{2} = 1.41$ として計算) を考えると

$$P(|\overline{X} - 50| \leqq 4) = 0.8414$$

となり, $n = 100$ のときよりも 1 に近づいている。

$n = 400$ のときは, 練習 1.10 の結果と同じであるあるが, さらに 1 に近づいていることが分かるだろう。

一般に, 次の法則が成り立つことが知られている。

公式等 1.11: 大数の法則

母平均 m である母集団から大きさ n の標本を抽出し, 標本平均を $\overline{X}$ とする。n を限りなく大きくすると, $\overline{X}$ が m に近い値をとる確率は限りなく 1 に近づく。

コラム 1.4: 公式等 1.9 の証明

証明. 標本の変量を $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ とすると，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)$$

であり，$\overline{X}$ の期待値は

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n}(m + m + m + \cdots + m) = m \end{aligned}$$

また，復元抽出においては，$X_1, X_2, X_3, ?, X_n$ は互いに独立であるから，

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}V(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \cdots + V(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

よって，X の標準偏差は $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **証明終**

コラム 1.5: 中心極限定理

母平均が m，母分散が σ^2 である母集団からの標本の変量を $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ とし，$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ とする。一般に，母集団がどのような分布であっても，n が大きくなるとき S_n の確率分布は正規分布 $N(nm, n\sigma^2)$ に近づくことが示されている。これを**中心極限定理** (central limit theorem) という。この定理より，公式等 1.10 が示される。

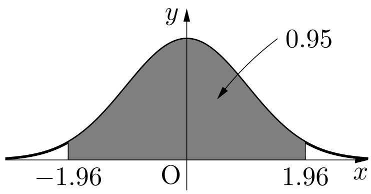
4 推定

4.1 母平均の区間推定

母平均 m, 母標準偏差 σ を持つ母集団から抽出された大きさ n の標本の標本平均を $\overline{X}$ とする。n が大きいとき, $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うから,

$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.3)$$

とすると, Z は正規分布 N(0,1) に従う。正規分布表より,



$$P(0 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.475$$

であるから

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.95$$

である。よって, Z は 95% の確率で

$$-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$$

の範囲に含まれる。この不等式に, 式 (1.3) を代入して変形すると,

$$\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。この範囲を, 母平均 m に対する 95% の**信頼区間** (95% confidence coefficient) という。[1]

公式等 1.12: 信頼区間

母標準偏差 σ を持つ母集団から抽出された大きさ n の標本から得られた標本平均が $\overline{X}$ であったとき, 母平均 m に対する 95% の**信頼区間**は

$$\boldsymbol{\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

[1] x の範囲 $a \leqq x \leqq b$ を, 区間 $[a, b]$ と表すことがある。この表し方を用いると, 母平均 m に対する 95% の信頼区間は $\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ と表される。

同様に考えると, 99% の信頼区間は

$$\boldsymbol{\overline{X} - 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

となる。これらの信頼区間の式には母標準偏差 σ が含まれているが, 一般に, 母平均を推定する際には母標準偏差も不明である場合がほとんどである。n が十分に大きいときは, 母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いて良いことが知られている。

例題 1.11: 母平均の区間推定

成人男性の平均身長を知りたいと考え, 成人男性 100 名を無作為に抽出して身長を計測したところ, 100 名の身長の平均は 171cm, 標準偏差は 5cm であった。成人男性全体の平均身長を m cm とするとき, m に対する 95% の信頼区間を求めよ。

解答. 標本の大きさ 100 は十分に大きいから, 母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 5 を用いて計算すると, m に対する 95% の信頼区間は,

$$171 - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 171 + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}$$

すなわち

$$170.02 \leqq m \leqq 171.98$$

である。

練習 1.12: 母平均の区間推定

全国の高校 1 年生女子のハンドボール投げの記録の平均値を知りたいと考え, 全国の高校生女子 400 名を無作為に抽出してハンドボール投げの記録を分析したところ, 400 名の平均は 14m, 標準偏差 4m であった。全国の高校 1 年生女子のハンドボール投げの記録の平均値を m m とするとき, m に対する 95% の信頼区間を求めよ。ただし, 小数第 3 位を四捨五入して答えること。

4.2 母比率の区間推定

母集団の中で, ある特性を持つものの割合を**母比率** (population proportion) といい, この母集団から抽出された標本の中でその特性を持つものの割合を**標本比率** (sample proportion) という。標本比率から母比率を推定することを考えよう。

特性 A の母比率が p である母集団から抽出した大きさ n の標本において, 特性 A を持つものの個数を T とすると, T は二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数であるから,

$$E(T) = np, \quad V(T) = np(1-p)$$

ここで, 標本比率を R とすると, $R = \dfrac{T}{n}$ であるから,

$$E(R) = E\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(T) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$$V(R) = V\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(T) = \frac{1}{n^2} \cdot np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

となる。n が十分に大きいとき, R は近似的に正規分布 $N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うと考えてよいから,

$$-1.96 \leqq \frac{R-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leqq 1.96$$

となる確率が 0.95 である。この不等式を変形すると,

$$R - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqq p \leqq R + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

となる。n が十分に大きいときは, R は p に近い値となるため, 母比率 p に対する 95% の信頼区間を考える際には, 上式の根号の中の p を R で置き換えた次の式を用いる。

公式等 1.13: 母比率の 95% 信頼区間

標本比率が R が得られたとき, が母比率 p に対する 95% の信頼区間は

$$\boldsymbol{R - 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R + 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}}$$

練習 1.13: 母比率の区間推定

ある町で小学生 400 人を無作為に選んで虫歯を調査したところ, 320 人が虫歯を持っていた。この町の小学生の虫歯保有率 p に対する 95% の信頼区間を求めよ。ただし, 小数第 3 位を四捨五入して答えること。

コラム 1.6: 信頼区間の意味

「95% の信頼区間」というと, 「母平均 m がその区間に含まれる確率が 95%」と考えがちであるが, m は確率変数ではなく定まった値であるため, 「確率」という言葉をここで用いることは適切ではない。一方, $\overline{X}$ は「母集団から標本を抽出する」という試行の結果によって定まる確率変数である。よって, 標本の取り方によって $\overline{X}$ の値は変わり, それによって信頼区間も変わる。「95% の信頼区間」とは, 95% の確率で母平均 m を含むような区間が得られる試行の結果として得られた区間の 1 つであると考える。

5 仮説検定

5.1 仮説検定の考え方

A さんはある硬貨を投げる実験を何度か行い, 経験的に「この硬貨は表が出やすい」と感じている。なんとかしてこのことを, 他の人にも納得できるように説明することはできないだろうか。

ある 1 枚の硬貨を 2 回投げて, 表が 2 回出たとする。この時点で, 「この硬貨は表の方が出やすい」と考える人はいないだろう。しかし, 10 回投げて 9 回表が出たらどうであろうか。そこで A さんは次のような実験を行った。この硬貨を 1 回投げたときに表の出る確率を p とし, あえて

$$p = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.4)$$

という仮説を立てた。

続いて, この硬貨を 10 回投げる実験を行ったところ, 9 回表が出た。そこで, A さんは次のように主張した。

$p = \dfrac{1}{2}$ という仮説のもとで, 表が 9 回以上出る確率は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{1024} \fallingdotseq 0.01$$

とかなり低い。よって, 「$p = \dfrac{1}{2}$」であるとは考えにくく,

$$p > \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1.5)$$

と考えた方が自然であろう。

このようにして「この硬貨は表の方が出やすい」と主張すれば, 他の人も受け入れやすいのではないだろうか。

このようにして, ある主張が正しいかどうかを判断する方法を**仮説検定** (hypothesis testing) という。この場合の仮説 (1.4) を**帰無仮説** (null hypothesis), 仮説 (1.5) を**対立仮説** (alternative hypothesis) といい, 帰無仮説が正しいという可能性を捨てることを, 帰無仮説を**棄却する** (reject) という。

帰無仮説は, 分布が分かりやすい確率変数（標本平均や標本比率など）に対して設定する。この変数を**検定統計量** (test statistic) という。帰無仮説が正しいという仮定のもとで, 検定統計量の値が実際に得られた値以上の値となる確率

p を求める。上の例では, $p \fallingdotseq 0.01$ であった。仮説検定を行う際には, 事前に基準となる確率 α を決めておき, $p \leqq \alpha$ であったときに帰無仮説を棄却する。この α を**有意水準** (significance level) という。α の値としては 0.05 や 0.01 などがよく用いられる。p の値を $\boldsymbol{p}$ **値** (p-value) ということもある。

例題 1.12: シミュレーション結果をもとに仮説検定

ある浄水器の性能を調べるために, 無作為に選んだ 20 人に対し, 浄水器を通さない水 A と浄水器を通した水 B を飲んでもらい, どちらがおいしいか答えてもらったところ, 14 人が浄水器を通した水 B の方がおいしいと回答した。
比較のために, 公正なコインを 20 回投げて表の出た枚数を記録する実験を 1 セットとし, この実験を 200 セット行ったところ次の表のようになった。

枚数	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	計
度数	2	10	15	19	26	45	35	28	12	5	3	200

この回答データから,「一般に水 B の方がおいしいと思う人が多い」と判断してよいか。コイン投げの結果を用いて, 基準となる確率（有意水準）0.05 で検定せよ。

解答. 帰無仮説を「A, B を選ぶ確率が等しい」, 対立仮説を「B の方が選ばれやすい」とする。この仮説のもとでは, 20 人中 14 人以上が B と答える確率は, コイン投げで 20 回以上表が出る確率に等しいと考えられ,

$$\frac{5+3}{200} = 0.04$$

である。この確率は基準となる確率 0.05 より小さいから, 帰無仮説は棄却され,「水 B のほうが選ばれやすい」と判断してよい。すなわち「一般に水 B の方を美味しいと思う人が多い」といえる。

練習 1.14: シミュレーション結果をもとに仮説検定

A 君が射的を行ったところ, 30 発中 6 発しか命中しなかった。
比較のために, 正確につくられたさいころを 30 回投げて 2 以下の目が出た回数を記録する実験を 1 セットとし, この実験を 200 セット行ったところ次の表のようになった。
A 君の射的の命中率は $\frac{1}{3}$ より小さいといえるか。サイコロ投げの結果を用いて基準となる確率（有意水準）0.05 で検定せよ。

回数	3	4	5	6	7	8	9	10	11
割合	1%	1%	2%	4%	6%	12%	14%	16%	14%

回数	12	13	14	15	16	17	18	19	計
割合	12%	9%	5%	4%	2%	1%	0%	1%	100%

5.2 正規分布を用いた母平均・母平均の検定

例題 1.12 では, コイン投げの結果と比較して仮説検定を行った。しかし, このようなシミュレーション結果を検定のたびに準備するのは少々面倒である。そこで, よく知られた確率分布を利用する方法を考えよう。

例題 1.12 の標本の大きさを増やし, 100 人に調査したところ, 60 人が B の方が美味しいと答えたとする。

帰無仮説を「100 人の人が A か B かを等しい確率で選んでいる」とする。このとき, B を選ぶ人数 X は二項分布 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ に従う。公式等 1.8 より, X は近似的に正規分布 $N(50, 25)$ に従うとみなすことができるから,

$$Z = \frac{X - 50}{5}$$

とすると, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。調査では, $X = 60$ という結果が得られたことになるが, このとき,

$$Z = \frac{60 - 50}{5} = 2$$

であり,

$$\begin{aligned} P(Z \geqq 2) &= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &\fallingdotseq 0.5 - 0.4772 = 0.0228 < 0.05 \end{aligned}$$

であるから, 0.05 より小さな確率でしか得られないデータが得られたことになる。よって, 帰無仮説は棄却される。

このように, 検定統計量が従う確率分布が分かれば, シミュレーション結果などを用意しなくても, その確率分布表などを用いて検定を行うことができる。

一般に, 検定統計量 Z が標準正規分布に従うとき, 正規分布表より,

$$P(Z \geqq 1.64) \fallingdotseq 0.05$$

であるから, データから計算した Z の値が

$$Z \geqq 1.64 \qquad \cdots\cdots\cdot \ (1.6)$$

を満たすとき, そのような Z の値が得られる確率は 0.05 より小さいといえ, 帰無仮説は棄却される。不等式 (1.6) のように,「検定統計量の値がこの範囲に含まれると帰無仮説が棄却される」といえる範囲を**棄却域** (rejection region) という。

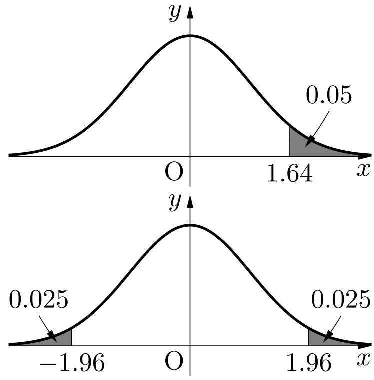


図 1.1: 標準正規分布における有意水準 5%の棄却域 (上図は片側検定, 下図は両側検定)

先ほどの例では,「水 B を選ぶ人の方が多い」ことを主張したかったため,「B を選ぶ人が極端に多い場合に帰無仮説が棄却される」という考えに基づいて検定を行った。この場合, 棄却域を片側のみにとる。このように, 棄却域を片側だけにとって行う検定を**片側検定** (one sided test) という。片側検定では, 棄却域を上側にとる場合と下側にとる場合がある。

一方,「A と B を選ぶ人の割合が等しくない」ことを主張する場合,「B を選ぶ人が極端に多い場合も, 極端に少ない場合も帰無仮説が棄却される」という考えに基づいて検定を行うこともある。この場合は, 棄却域を両側にとって検定を行う。この検定を**両側検定** (two sided test) という。

図 1.1 に示すように, 標準正規分布に従う検定統計量について, 有意水準 5% の棄却域は次のようになる。

公式等 1.14: 有意水準 5% の棄却域 (標準正規分布)

帰無仮説のもとで標準正規分布に従う検定統計量 Z の有意水準 5% の棄却域は,

- 両側検定では $\boldsymbol{Z \leqq -1.96,\ 1.96 \leqq Z}$
- 棄却域を上側にとる片側検定では $\boldsymbol{1.64 \leqq Z}$
- 棄却域を下側にとる片側検定では $\boldsymbol{Z \leqq -1.64}$

例題 1.13: 母比率の両側検定

あるさいころを 500 回投げたところ, 1 の目が 75 回出た。このさいころの 1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ ではないといえるか。有意水準 5% で検定せよ。

解答. 1 の目が出る確率 (母比率) を p とし, 帰無仮説を $p = \dfrac{1}{6}$, 対立仮説を $p \neq \dfrac{1}{6}$ として両側検定を行う。

帰無仮説が正しいとき, 標本比率 R は正規分布 $N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うから, $Z = \dfrac{R-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ とすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

$R = \dfrac{75}{500} = \dfrac{3}{20}$ のとき,

$$Z = \frac{\dfrac{3}{20} - \dfrac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)}{500}}} = -1$$

であり, 有意水準 5% での Z の棄却域 $Z \leqq -1.96, 1.96 \leqq Z$ に含まれない。よって, 帰無仮説を棄却できず, 「1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではない」とはいえない。

練習 1.15: 母比率の両側検定

ある 1 枚のコインを 400 回投げたところ, 表が 185 回出た。このコインの表と裏の出やすさには偏りがあるといえるか。有意水準 5% で検定せよ。

例題 1.14: 母比率の片側検定 (上側)

ある植物の種子の発芽率は 40% であるといわれている。この種子の発芽率を上げるために改良した新しい種子から無作為に 600 個を選んで蒔いたところ, 270 個が発芽した。新しい種子の発芽率は 40% より高くなったといえるか。有意水準 5% で検定せよ。

解答. 新しい種子の発芽率を p とし, 帰無仮説を $p = 0.4$, 対立仮説を $p > 0.4$ として棄却域を上側にとる片側検定を行う。帰無仮説が正しいとき, 標本比率 R は正規分布 $N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うから, $Z = \dfrac{R-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ とすると, Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。$R = \dfrac{270}{600} = \dfrac{9}{20}$ のとき, $Z = \dfrac{\frac{9}{20} - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{600}}} = 2.5$ となり, 有意水準 5% での棄却域 $1.64 \leqq Z$ に含まれるため, 帰無仮説は棄却され, 「発芽率は 40% より高くなった」と判断できる。

練習 1.16: 母比率の片側検定 (下側)

A 君が射的を行ったところ, 30 発中 6 発しか命中しなかった。A 君の射的の命中率は $\dfrac{1}{3}$ より小さいといえるか。有意水準 5% で検定せよ。ただし, $\sqrt{15} = 3.873$ とする。

例題 1.15: 母平均の両側検定

ある工場では, 部品 A を 1 個の質量が平均 10g となるように製造しているという。この工場が製造したこの部品 A を無作為に 400 個選んで調べたところ, 質量の平均は 10.02g, 標準偏差は 0.2g であった。この工場で製造している部品 A の質量の平均は 10g でないといえるか。有意水準 0.05 で検定せよ。

解答. 部品 A の質量の平均（母平均）を m とする。帰無仮説を $m=10$, 対立仮説を $m \neq 10$ として両側検定を行う。
母標準偏差を σ, 無作為に抽出した 400 個の部品 A の質量の平均（標本平均）を $\overline{X}$ とする。標本の大きさは十分に大きいから, 帰無仮説が正しいとき, 標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。よって, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。標本の大きさが十分に大きいから, 標本の標準偏差を用いて $\sigma=0.2$ とすると, $X=10.02$ のとき,

$$Z=\frac{10.02-10}{\frac{0.2}{\sqrt{400}}}=2$$

であり, 有意水準 5% の棄却域 $Z \leqq -1.96, 1.96 \leqq Z$ に含まれる。したがって, 帰無仮説は棄却され,「部品 A の質量の平均は 10g でない」と判断できる。

練習 1.17: 母平均の両側検定

A 社が製造するお菓子には, 内容量が 1 袋 500g と表示されている。これが正しいかどうかを調べるために, このお菓子 100 袋を無作為に取り出して分析したところ, 1 袋あたりの内容量の平均値は 499g, 標準偏差は 20g であった。このお菓子の内容量の平均値は 500g でないといえるか。有意水準 5% で検定せよ。

6 さまざまな確率分布とその応用

6.1 χ^2 分布

確率変数 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ が互いに独立で，それぞれが標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

が従う分布を，**自由度 n のカイ 2 乗分布** といい，$\boldsymbol{\chi^2(n)}$ で表す。巻末には χ^2 分布表を掲載している。

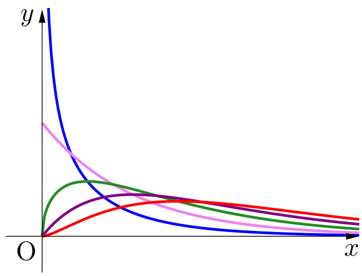


図 1.2: χ^2 分布曲線

6.2 独立性の検定

「朝食を食べたかどうか」が「授業中眠くなる」ことに関係があるのではないかという仮説を立てて，160 人の生徒に「今日朝食を食べたかどうか」と「今日の授業中に 1 回でも眠くなったかどうか」を調査してみたところ，右の表のような分割表が得られた。この結果から「朝食を食べたかどうか」が「授業中眠くなる」ことに関係があるといえるだろうか。

表 1.1: 朝食と眠気の関係

	食べなかった	食べた	計
眠くなった	44	20	64
眠くならなかった	36	60	96
計	80	80	160

このように，2 つの質的変数（上の例の場合は「朝食を食べたかどうか」と「授業中眠くなったかどうか」）の関係の有意性を調べる際には，「これら 2 つの質的変数が独立である」という帰無仮説のもとに，**独立性の検定** (test of independence) を行う（帰無仮説が棄却されると「2 変数が独立でない」，すなわち「2 変数の間に関係がある」ということが示される）。

上の調査対象の 160 名のうちの 1 名を無作為に取り出したときに，その 1 名が「眠くなった人である」という事象を A，「朝食を食べなかった人である」という事象を B とすると，$P(A) = \dfrac{2}{5}$，$P(B) = \dfrac{1}{2}$ であるから，事象 A と事象 B が独立であるとすると，

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5}$$

となる。このとき, 160 名を調査した際に「眠くなった」かつ「朝食を食べなかった」という人の度数は

$$160 \cdot \frac{1}{5} = 32$$

となることが期待される。

同様にして, 二つの事象が独立である場合に期待される度数を求め, 分割表を作成すると, 右表のようになる。このようにして求めた度数を**期待度数** (expected frequency) という。これに対し, 実際に調査して得られた度数を**観測度数** (observed frequency) という。

表 1.2: 朝食と眠気の関係の期待度数

	食べなかった	食べた	計
眠くなった	32	32	64
眠くならなかった	48	48	96
計	80	80	160

一般に, 表 1.3 のような観測度数と表 1.4 のような期待度数が得られたとき, 下式で与えられる検定統計量 χ^2 の値を用いて観測度数と期待度数のずれを評価する (χ はギリシャ文字で「カイ」と読む)。

$$\chi^2 = \frac{(O_{11} - E_{11})^2}{E_{11}} + \frac{(O_{12} - E_{12})^2}{E_{12}} + \cdots + \frac{(O_{rc} - E_{rc})^2}{E_{rc}}$$

この検定統計量 χ^2 は, 二つの質的変数が独立であれば, 自由度 $(c-1)(r-1)$ の χ^2 分布に従う。このことを用いて, 独立性の検定を行う。この独立性の検定は, χ^2 分布を用いるため, **χ^2 検定** (chi-squared test) と呼ばれる。

ある確率分布に従う確率変数 X が, $P(X \geqq x) = \alpha$ を満たす点 x をその確率分布の 100α パーセント点という。自由度 k の χ^2 分布におけるパーセント点を $\chi^2_\alpha(k)$ で表す。

表 1.3: 観測度数

	B_1	B_2	$\cdots$	B_c
A_1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1c}
A_2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2c}
$\cdots$				
A_r	O_{r1}	O_{r2}	$\cdots$	O_{rc}

表 1.4: 期待度数

	B_1	B_2	$\cdots$	B_c
A_1	E_{11}	E_{12}	$\cdots$	E_{1c}
A_2	E_{21}	E_{22}	$\cdots$	E_{2c}
$\cdots$				
A_r	E_{r1}	E_{r2}	$\cdots$	E_{rc}

例題 1.16: 独立性の検定

表 1.1 の分割表について，「朝食を食べたかどうか」と「眠くなったかどうか」が独立でないといえるか。有意水準 0.01 で検定せよ。

解答. 「『朝食を食べたかどうか』と『眠くなったかどうか』が独立である」を帰無仮説とし，表 1.1 と表 1.2 から検定統計量 χ^2 の値を計算すると，

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(44-32)^2}{32} + \frac{(20-32)^2}{32} + \frac{(36-48)^2}{48} + \frac{(60-48)^2}{48} \\ &= 15\end{aligned}$$

である。
χ^2 分布表より，$\chi^2_{0.01}(1) = 6.63$ であり，帰無仮説は有意水準 1% で棄却される。よって「朝食を食べたかどうか」と「眠くなったかどうか」は関係があるといえる。

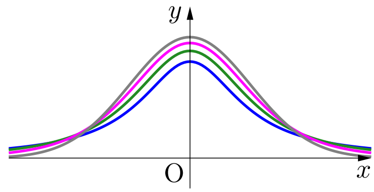
練習 1.18: 独立性の検定

80 名の男子生徒と 80 名の女子生徒に対して，「アイスクリーム」が「好き」「好きでない」を調べたところ，右表のような分割表が得られた。アイスクリームの好き嫌いと性別との間に関係があるといえるかどうかを，有意水準 1% で検定せよ。巻末の χ^2 分布表を用いてよい。

	好き	でない	計
男子	56	24	80
女子	72	8	80
計	128	32	160

6.3 t 分布

Z が標準正規分布に従い, Y が自由度 k の χ^2 分布に従い, これらが独立のとき, $\dfrac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ が従う分布を **t 分布** (t-distribution) という。t 分布曲線は正規分布曲線に似た形をしており, 自由度が大きくなると標準正規分布に近づく。



6.4 母平均の t 検定

母平均についての推定や検定を行う際, 母分散や母標準偏差が分かっているときは, 前節の正規分布を用いた検定（「z 検定」(z-test) という）を行うが, 一般に, 母平均の検定を行う際に, 母分散や母標準偏差が分かっていることは少ない。これまで, 標本の大きさが十分に大きいときは, 母標準偏差の代わりに標本から得られる標準偏差 S を用いてよいとしてきた。

公式等 1.9 で述べたが, 母平均 m, 母分散 σ^2 である母集団からの標本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ について, その標本平均を $\overline{X}$ とすると, これは標本を抽出するという試行によって値が定まる確率変数であり, $E(\overline{X})=m$ であった。標本から得られる分散

$$S^2=\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$

も同様に確率変数であるが, $E(S^2)=\dfrac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$ であり, S^2 の期待値は σ^2 に一致しない (証明はコラム 1.7)。そこで, 新たに次の不偏分散を定義する。

定義 1.7: 不偏分散

標本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ について**不偏分散** (unbiased variance) s^2 を次で定義する。

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left\{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\overline{X}\right)^2\right\}$$

不偏分散 s^2 は, $E(s^2) = \sigma^2$ を満たすため, 特に標本の大きさが十分でない場合, 母分散の代わりに用いる統計量としては, 標本の分散よりも不偏分散の方が適切である。[2]

標本平均を $\overline{X}$, 不偏分散を s^2, 標本の大きさを n とするとき, 母平均 m に対する検定統計量 $t = \dfrac{\overline{X} - m}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。自由度 k の t 分布における 100α パーセント点を $t_\alpha(k)$ で表す。この分布を用いた検定は**スチューデントの t 検定** (Student's t-test), または単に t 検定と呼ばれる。

例題 1.17: 母平均の t 検定

ある機械で製造された 5 個の製品の重量を測定したところ,

56g, 53g, 57g, 55g, 49g

であった。母平均は 50g ではないといえるか。有意水準 5% で検定せよ。

解答. 母平均を m とする。帰無仮説を $m = 50$, 対立仮説を $m \neq 50$ として両側検定を行う。

右表より

$$\overline{X} = \frac{270}{5} = 54,$$

$$s^2 = \frac{40}{4} = 10$$

X	56	53	57	55	49	270
$X - 54$	2	-1	3	1	-5	
$(X-54)^2$	4	1	9	1	25	40

であるから,

$$t = \frac{54 - 50}{\sqrt{\frac{10}{5}}} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.828$$

となる。2.828 は $t_{0.025}(4) = 2.776$ より大きいから棄却域に含まれる。よって, 帰無仮説は棄却され, 「母平均は 50 ではない」といえる。

[2] たとえば $n = 10$ の場合は, $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2 = 0.9\sigma^2$ となり, 標本の分散の期待値は母分散より 1 割も小さい。

練習 1.19: 母平均の t 検定

紙飛行機の飛行距離を競うコンテストにおいて, 予選を突破するためには 15m 以上の成績を出さなければならない。A 君が試作した紙飛行機の飛行テストを 6 回行ったところ, その飛行距離は以下のようになった。

$$16\text{m},\ 14\text{m},\ 15\text{m},\ 12\text{m},\ 13\text{m},\ 14\text{m}$$

この試作品はコンテストの予選を突破することは困難であるといえるか。有意水準 5% の片側検定で検定せよ。ただし, $\sqrt{3} = 1.732$, $t_{0.05}(5) = 2.015$ とする。

6.5 2 標本の検定

患者を 2 つのグループに分けて, 一方のグループにその治療薬を, もう一方のグループには見た目は同じであるが効果のない薬 (偽薬と呼ばれる) を服用させて, 2 つのグループに効果の差があるかどうかを検定する場合がある。このように, 2 つの標本のデータに対して行う検定を **2 標本の検定** (two-sample test) という。

ある生徒のグループに対して 2 つの異なるテストを実施して, その点数の平均値に差があるかどうかを検定する場合など, 2 つの標本に対応がある場合は, 各生徒の 2 つのテストの差をとり, その平均が 0 に等しいという帰無仮説を立てて検定を行う。

一方, 先に述べたの治療薬と偽薬の効果に差があるかどうかを調べる場合のように, 2 つの標本に対応がない場合もある。このような場合の検定の方法は少々複雑であり, ここでは省略する。[3]

[3] 2 つの母分散が等しいとみなせるかどうかで, 検定に用いる検定統計量や確率分布やが異なる。詳しくは, コラム 1.8 を参照のこと。

例題 1.18: 母平均の差の t 検定

9 人の被験者に対して, 薬品 A を投与し, 投与前の体温と投与後の体温を計測したところ, 下表のようになった。

被験者	1	2	3	4	5	6	7	8	9
投与前	36.2	36.4	35.9	36.3	36.4	36.6	36.3	36.5	36.1
投与後	36.3	36.5	36.0	36.2	36.4	36.9	36.5	36.5	36.3

この薬品の投与前と投与後で体温の変化があったといえるか。有意水準 0.05 で検定せよ。

解答. 投与後の体温から投与前の体温を引いた値の平均を m とし, $m=0$ を帰無仮説として両側検定を行う。
体温の差を X, 標本平均を $\overline{X}$, 標本の不偏分散を s^2 とすると, 帰無仮説が正しいとき, $t=\dfrac{\overline{X}-0}{\sqrt{\frac{s^2}{9}}}$ は自由度 8 の t 分布に従う。

被験者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計
X	0.1	0.1	0.1	-0.1	0.0	0.3	0.2	0.0	0.2	0.9
$X-\overline{X}$	0.0	0.0	0.0	-0.2	-0.1	0.2	0.1	-0.1	0.1	
$(X-\overline{X})^2$	0.0	0.0	0.0	0.04	0.01	0.04	0.01	0.01	0.01	0.12

上表より, $\overline{X}=0.1$, $s^2=\dfrac{0.12}{8}=0.015$ であるから

$$t=\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.015}{9}}}=\sqrt{6}\fallingdotseq 0.2449$$

となる。2.449 は $t_{0.025}(8)=2.306$ より大きいから棄却域に含まれる。よって, 帰無仮説は棄却され, 投薬前と投薬後で体温の変化があったといえる。

練習 1.20: 母平均の差の t 検定

ある音楽を聴くことが空間認知テストの成績に影響を与えるかどうかを調べるために, 5 人の生徒にこの音楽を聴く前と聴いた後に同じ難易度のテストを受験させた結果, 右表のような結果を得た。この音楽を聴くことが空間認知テストの成績に影響を与えるといえるか。有意水準 5% で検定せよ。ただし, $\sqrt{2} = 1.414$ とし, 巻末の t 分布表を用いてよい。

生徒	①	②	③	④	⑤
聴く前	75	64	82	72	69
聴いた後	75	65	84	75	73

コラム 1.7: 標本の分散の期待値

データの分散について

$$(x \text{ の分散}) = (x^2 \text{の平均}) - (x \text{ の平均})^2$$

が成り立つから,

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \cdots + X_n^2\right) - \overline{X}^2$$

と表すことができる。これより,

$$E(S^2) = \frac{1}{n}\left\{E\left(X_1^2\right) + E\left(X_2^2\right) + E\left(X_3^2\right) + \cdots + E\left(X_n^2\right)\right\} - E\left(\overline{X}^2\right)$$

となる。ここで, $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ に対して $V(X_i) = E\left(X_i^2\right) - \{E(X_i)\}^2$ が成り立つことから

$$E\left(X_i^2\right) = V(X_i) + \{E(X_i)\}^2 = \sigma^2 + m^2$$

また, $V\left(\overline{X}\right) = E\left(\overline{X}^2\right) - \left\{E\left(\overline{X}\right)\right\}^2$ が成り立つことから

$$E\left(\overline{X}^2\right) = V\left(\overline{X}\right) + \left\{E\left(\overline{X}\right)\right\}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2$$

よって

$$E\left(S^2\right) = \frac{1}{n}\left\{\left(\sigma^2 + m^2\right) \cdot n\right\} - \left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

7　表計算ソフトを用いた統計的分析

7.1　基本統計量の計算

表計算ソフトでは, 関数を入力することで様々な計算を行うことができる。これまでに学んできた基本統計量の計算をやってみよう。

表計算ソフトでの平均・分散・標準偏差

表計算ソフトで平均・分散・標準偏差を求める関数は右の通りである。[配列] には 13, 21, 32 のようにデータをカンマ区切りで直接入力しても良いが, 次の例題 1.19 のように, 他のセルにデータを入力しておいて, その範囲を参照することが多い。

平均	AVERAGE([配列])
分散	VARP([配列])
標準偏差	STDEVP([配列])
不偏分散	VAR([配列])
不偏標準偏差	STDEV([配列])

例題 1.19: 表計算ソフトによる平均と不偏分散の計算

例題 1.17 の 5 個の製品の測定結果について, 標本平均と不偏分散を表計算ソフトを用いて求めよ。

解答.　セル A1 からセル A5 までの範囲に測定結果のデータを入力し, セル D1 からセル D5 に, それぞれ

```
=AVERAGE(A1:A5)
=VAR(A1:A5)
=STDEV(A1:A5)
```

と入力すると, 右図のようになる。

fx　=STDEV(A1:A5)

	A	B	C	D
1	56		平均	54
2	53		不偏分散	10
3	57		不偏標準偏差	3.1623
4	55			
5	49			

7.2 2群の母平均の差の検定

表計算ソフトでの t 検定

TTEST([配列1], [配列2], [尾部], [検定の種類])

[尾部] は, 片側検定のときは 1, 両側検定のときは 2 を指定する。
[検定の種類] は, 対応のあるデータの場合は 1, 対応のないデータで分散が等しいと仮定できる場合は 2, 分散が等しいと仮定できない場合は 3 を入力する。

例題 1.20: 表計算ソフトによる t 検定

例題 1.18 の検定を, 表計算ソフトで行え。

解答. セル A1 からセル A9 までの範囲に投与前の体温, セル B1 からセル B9 までの範囲に投与後の体温を入力し, セル D2 には

=TTEST(A1:A9,B1:B9,2,1)

と入力すると右図のようになり, p 値が 0.03997 であることがわかる。よって, 有意水準 0.05 で帰無仮説は棄却され,「体温の変化があった」といえる。

fx	=TTEST(A1:A9,B1:B9,2,1)			
	A	B	C	D
1	36.2	36.3		p 値
2	36.4	36.5		0.03997
3	35.9	36.0		
4	36.3	36.2		
5	36.4	36.4		
6	36.6	36.9		
7	36.3	36.5		
8	36.5	36.5		
9	36.1	36.3		

練習 1.21: 表計算ソフトによる t 検定

練習 1.20 の検定を, 表計算ソフトで行え。

さらに, 次の関数で t の値を知ることもできる。

t 値の計算

```
TINV([確率],[自由度])
```

対応のある t 検定の場合, 自由度は, データの個数から 1 を引いた値となる。例題 1.20 のシートにおいて, セル D4 に

```
=TINV(D2,8)
```

と入力すると, 右のようになる。

f_X	=TINV(D2,8)			
	A	B	C	D
1	36.2	36.3		p 値
2	36.4	36.5		0.03997
3	35.9	36.0		
4	36.3	36.2		t 値
5	36.4	36.4		2.44949
6	36.6	36.9		
7	36.3	36.5		
8	36.5	36.5		
9	36.1	36.3		

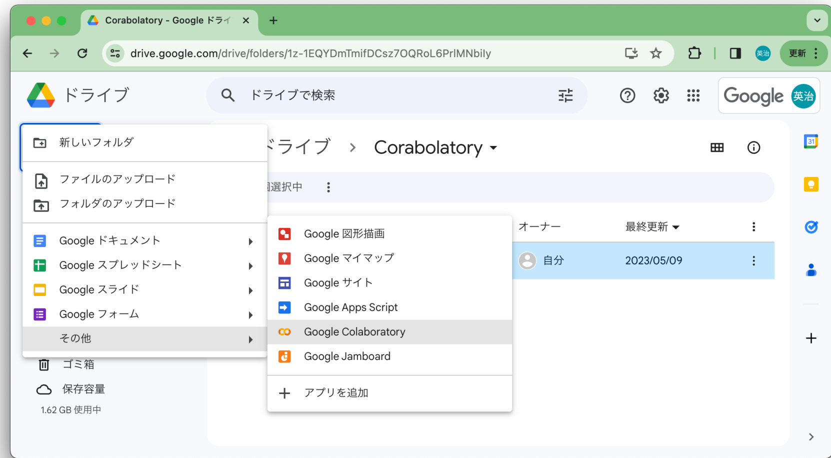
課題研究などで, 効果があったかどうか (すなわち, 母平均に差があったかどうか) を示す際には, たとえば次にように記述すると良い。

例 1.3: 検定結果の報告例

各被験者の投与前と投与後の体温を測定し, 結果に差があるかどうかを調べるために, 対応のある t 検定を行った結果, 有意水準 5% で有意な差が得られた ($t(8) = 2.449$, $p = 0.040$)。

8 Python を用いた統計的分析

この節では，プログラミング言語のひとつである Python を用いて，ここまでに学んだ統計的分析の処理を行う。



Python を使用するには，Google Drive の任意のフォルダにおいて，「+新規」をクリックし，「その他」のメニューから「Google Corabolatory」を選択する。

8.1 ライブラリのインポート

プログラミング言語において，よく使う処理をまとめたものを**ライブラリ** (library) という。Python におけるライブラリはいくつかの機能をまとめた**モジュール** (module) と，いくつかのモジュールをまとめた**パッケージ** (package) からなる。モジュールの機能を使えるようにするには，**インポート** (import) しなければならない。

あるパッケージに含まれるモジュールをインポートする場合は，

ライブラリのインポート

```
import [モジュール名]
```

モジュールの名前が長いときは, 次のように別名をつけておくと便利である。

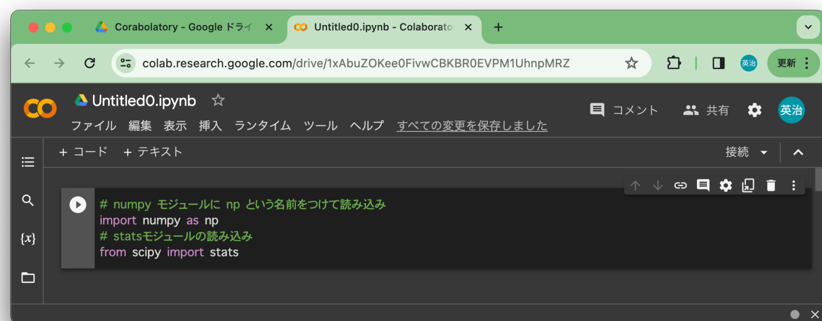
モジュールに別名をつけてインポート

```
import [モジュール名] as [別名]
```

ここでは, 数値計算を効率的に行うためのモジュールである numpy と, 科学技術計算のためのパッケージである scipy に含まれる統計処理のためのモジュール stats を読み込む。なお, # 以降は「コメント」といい, プログラムを読みやすくするためのメモのようなものである。コメントはプログラムの動作には影響しない。

```
# numpy モジュールに np という名前をつけて読み込み
import numpy as np
# stats モジュールの読み込み
from scipy import stats
```

[Shift] キーを押しながら [Enter] キーを押すと, その枠内のプログラムが実行される。



8.2 確率の計算

stats モジュールでは, 確率分布ごとに Python のクラスが, そして各クラスには確率の計算や検定などを行うメソッドが用意されている。主なクラスは右表のおとり。[4]

クラス名	確率分布
norm	正規分布
t	t 分布
chi2	χ^2 分布
f	F 分布

まずは, 正規分布に従う確率変数がある範囲の値をとる確率を求めてみよう。cdf メソッドで, 確率変数がある値以下となる確率を求めることができる (累積分布関数という)。

正規分布の累積分布関数

```
stats.norm.cdf([値], loc=[平均], scale=[標準偏差])
```

例えば, 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 X について $P(X \leqq 1)$ の値を求めるためには, 次のようにすればよい。

```
stats.norm.cdf(1, loc=0, scale=1)
```

出力結果

```
0.8413447460685429
```

sf メソッドを使うと, 確率変数がある値以上となる確率を求めることができる (生存関数という)。

正規分布の生存関数

```
stats.norm.sf([値], loc=[平均], scale=[標準偏差])
```

例えば, 標準正規分布に従う確率変数 X について $P(X \geqq 2)$ の値を求めるためには, 次のようにすればよい。

[4] クラスやメソッドなどについては深入りしない。詳しく知りたい人は Python の解説書やオブジェクト指向プログラミングについての解説書を参考のこと。

```
stats.norm.sf(2, loc=0, scale=1)
```

出力結果

```
0.022750131948179195
```

結果が見にくいので, 四捨五入してみよう。round という関数を使う。

四捨五入

```
round([式], [桁数])
```

上の例で小数第 5 位で四捨五入して小数第 4 位まで表示させるには次のようにすればよい。

```
round(stats.norm.sf(2, loc=0, scale=1),4)
```

出力結果

```
0.0228
```

例題 1.21: Python による確率の計算

例題 1.9 の答を Python によって計算せよ。

解答.

```
n = 720
p = 1/6
X = n * p
s = np.sqrt(n*p*(1-p)) # 標準偏差 √ (np(1-p))
round(stats.norm.sf(130, loc=X, scale=s),4)
```

出力結果

```
0.1587
```

4 行目で, 平方根の計算に numpy モジュールの sqrt メソッドを用いている。

練習 1.22: サイコロを繰り返し投げたときの確率

例題 1.21 と同様にして, 練習 1.10 の答を求めよ。

8.3 区間推定

`interval` メソッドを使うと信頼区間を求めることができる。

信頼区間を求める

```
stats.norm.interval([信頼係数], loc=[平均], scale=[標準偏差])
```

例題 1.22: Python による区間推定

Python を用いて例題 1.11 の区間を求めよ。

解答.

```
# 母平均の推定
n = 100 # 標本の大きさ
X = 171 # 標本平均
S = 5 # 母集団の標準偏差（標本の標準偏差で代用）
low, hi \
= stats.norm.interval(0.95, loc=X, scale=S/np.sqrt(n))
round(low,2), round(hi,2)
```

出力結果

```
(170.02,171.98)
```

練習 1.23: Python による区間推定

例題 1.22 と同様にして, 練習 1.12, 練習 1.13 の信頼区間を求めよ。

8.4　母平均に関する t 検定

いくつかの値をまとめて扱う際には，リストという形式を用いる。リストは角括弧の中に複数の値をカンマで区切って表記する。numpy にはリストをより使いやすくしたアレイという形式が定義されている。

```
# データの定義
dat = np.array([56,53,57,55,49])
# データの表示
dat
```

出力結果

```
array([56, 53, 57, 55, 49])
```

アレイに含まれる値の個数を調べるには，

アレイの大きさ

```
[アレイ].size
```

とすればよい。例えば，上で定義したアレイ dat に含まれる値の個数は次のようにして調べられる。

```
dat.size
```

出力結果

```
5
```

アレイに含まれる値の平均を求める mean メソッドや分散を求める var メソッドも用意されている。先ほどのアレイ dat に含まれる値の平均を求めるには，

```
np.mean(dat)
```

出力結果

```
54.0
```

分散を求めるには，

```
np.var(dat,ddof=0)
```

出力結果

```
8.0
```

var メソッドで ddof=1 とすると不偏分散を返す。

```
np.var(dat,ddof=1)
```

出力結果

```
10.0
```

例 1.17 の t 検定を Python でやってみよう。次のプログラムでは, t の値と p 値を求めている。

```
dat = np.array([56,53,57,55,49]) # データの定義
m = 50 # 母平均（帰無仮説）
n = dat.size # 標本の大きさ
X = np.mean(dat) # 平均
s2 = np.var(dat,ddof=1) # 不偏分散
t = (X-m)/np.sqrt(s2/n) # t の値
p = stats.t.sf(t,df=n-1)*2 # p 値（両側検定のため 2 倍）
print("t=",round(t,4),"p=",round(p,4)) # 結果の表示
```

出力結果

```
t= 2.8284, p= 0.0474
```

練習 1.24: Python による t 検定

練習 1.19 の t 検定を行うプログラムを Python で作成せよ。

p 値が 0.05 より小さいから, 帰無仮説「$m = 50$」は棄却され, 対立仮説「$m \neq 50$」が示される。

なお, t 分布表にある $t_0.025(4)$ の値については, 次のようにして確認できる。

```
stats.t.isf(0.025,df=4)
```

出力結果

```
2.7764451051977996
```

実は, 次のように t の値と p 値を同時に求める ttest_1samp メソッドも用意されている。

```
# 1 標本の t 検定
t, p = stats.ttest_1samp(dat,50)
print("t=", round(t,4), "p =", round(p,4))
```

出力結果

```
t= 2.8284 p = 0.0474
```

8.5 2 標本の検定

患者を 2 つのグループに分けて, 一方のグループにその治療薬を, もう一方のグループには偽薬と呼ばれる見た目は同じであるが効果のない薬を服用させて, 2 つのグループに差があるかどうかを検定する場合がある。このように, 2 つの標本のデータに対して行う検定を **2 標本の検定** (two-sample test) という。

同じ対象に対して 2 つの異なるテストを実施して平均の差を検定する場合など, 2 つの標本に対応がある場合は, 例題 1.18 のように考えるとよい。しかし, 2 つの標本に対応がない場合の検定は少々複雑である。ここでは, コンピューターを用いて検定を行ってみよう。

例題 1.23: 2 標本の母平均の差の検定

ある鉱石から金属 X を生成する実験を行っている。従来のやり方で 500g の鉱石から金属 X を生成する実験を 4 回行ったところ, 生成できた金属 X は 32g, 33g, 34g, 35g であった。新しいやり方で実験を 5 回行ったところ, 42g, 36g, 36g, 38g, 40g という結果であった。やり方を変えたことで生成される金属の量は変化したといえるか。有意水準 5% で検定せよ。

解答. 2 つの方法について取り出すことのできる金属の質量の母平均が等しいという帰無仮説のもと検定は, 次のようにして実行できる。

```
# Welch の検定（対応のない不等分散の 2 標本の t 検定）
dat1 = np.array([32,33,34,35])
dat2 = np.array([42,36,36,38,40])
t, p = stats.ttest_ind(dat1,dat2,equal_var=False)
print("t=",round(t,4),"p=",round(p,4))
```

出力結果

```
t= -3.6761 p= 0.0102
```

p 値が 0.0102 となり, 有意水準 5% で帰無仮説は棄却される。

練習 1.25: 2 標本の母平均の差の検定

ある模擬試験の数学の点数について調べたところ, A 先生の授業を受けている 5 名の点数は 64, 82, 58, 70, 66 であり, B 先生の授業を受けている 6 名の点数は 78, 42, 66, 36, 84, 66 であった。A 先生の授業を受けた生徒と B 先生の授業を受けた生徒の間に点数の差があると言えるか。有意水準 5% で検定せよ。

コラム 1.8: 2 標本の t 検定

検定に用いる統計量と確率分布は, 2 つの母分散が等しいことが仮定できる場合と, 母分散が等しいと仮定できない場合によって異なる。
$N(m_1, \sigma_1)$ に従う母集団からの大きさ n_1 の標本の標本平均が $\overline{X_1}$, 不偏分散が s_1^2, $N(m_2, \sigma_2)$ に従う母集団からの大きさ n_2 の標本の標本平均が $\overline{X_2}$, 不偏分散が s_2^2 であったとする。次のようになる。

母分散が等しいと仮定できる場合

検定統計量 $t = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) s^2}}$　$\left(\text{ただし } s^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$

確率分布　自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布

母分散が等しいと仮定できない場合

検定統計量 $t = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

確率分布　自由度 m の t 分布 $\left(\text{ただし } m = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^2}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^2}{n_2^2(n_2-1)}}\right)$

例題 1.23 では，母分散が不明であり，母分散が等しいと仮定できないものとして検定を行なっている。母分散が等しいということがわかっている場合, `equal_var=False` のところを `equal_var=True` に変えると良い。
母分散が不明である場合, 母分散が等しいという帰無仮説のもと検定を行い, その検定の結果を受けて, どちらの方法で母平均の検定を行うかを決めることもある。母分散が等しいかどうかの検定には F 検定と呼ばれる検定を用いる。

第2章　数理科学とその応用

1　回帰分析

1.1　2変量の相関と回帰分析

表 2.1: 気温とアイスクリームの売上数

日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
気温 x(℃)	30	31	33	33	35	32	32	36	29	29
売上数 y(個)	235	237	248	246	262	235	252	296	241	228

表 2.1 は, ある夏の 10 日間の気温と, ある店舗でのアイスクリームの売上数である。気温が高いほどアイスクリームがよく売れる傾向にあることがわかる。相関係数を計算すると, 0.84 と強い正の相関があることがわかる。

このデータを元に, その日の気温からアイスクリームの売上数を予測する方法を考えよう。

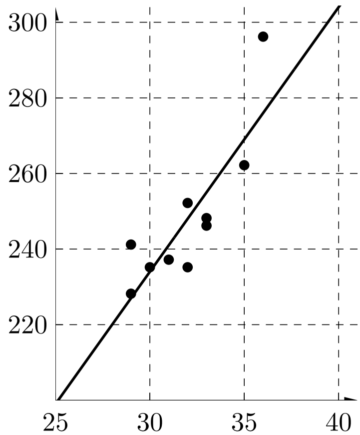


図 2.1: 気温とアイスクリームの売上数の散布図と回帰直線

相関係数が 1, -1 のとき, 散布図におけるデータを表すすべての点は, ある 1 つの直線上にある。相関係数が 1 や -1 に近い値であるとき, 散布図におけるデータを表すすべての点のできるだけ近くを通る直線を引き, この直線の方程式を用いてデータを予測することができる。この直線を**回帰直線** (regression line) といい, このような分析方法を**回帰分析** (regression analysis) という。

図 2.1 は, 表 2.1 のデータをもとにかいた散布図に回帰直線を引いたものである。この直線の方程式は $y = 7x + 24$ である。この直線の方程式を用いて, x の値から y の値を推測する。たとえば, 気温が 34 ℃であったときのアイスクリームの売上数の予測値は

$$7 \cdot 34 + 24 = 262(\text{個})$$

となる。

今回, 気温 x の値からアイスクリームの売上数 y を予測した。このときの変数 x を**独立変数** (independent variable) y を**従属変数** (dependent variable) という。独立変数のことを**説明変数** (explanatory variable), 従属変数のことを**目的変数** (object variable) ということもある。

1.2 回帰直線の求め方

上の例において回帰直線の方程式 $y = 7x + 24$ はどのようにして求めたのであろうか。ここでは, **最小二乗法** (method of least squares) という方法を用いた。

求める方程式を $y = ax + b$ とする。あらかじめ n 個のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_x)$ が得られているとする。$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ について, データの y_k の値と, 方程式 $y = ax + b$ の x に x_k を代入して得られる y の値との差

$$y_k - (ax_k + b)$$

を, **残差** という。この残差の 2 乗の和

$$\sum_{k=1}^{n} \{y_k - (ax_k + b)\}^2$$

を最小にする a, b の値をそれぞれ a_0, b_0 とするとき

$$y = a_0 x + b_0$$

を回帰直線の方程式とする。

例題 2.1: 回帰直線の方程式 (最小二乗法)

二つの変量 x, y について, 右表のようなデータが得られた。このデータを用いて, x から y を予測する回帰直線の方程式を, 最小二乗法により求めよ。また, 作成した回帰直線の方程式を用いて, $x = 4$ のときの y の値を予測せよ。

x	1	3	2
y	2	7	3

解答. 回帰直線の方程式を $y = ax + b$ とする。残差の 2 乗の和は D は,

$$\begin{aligned} D &= \{(a \cdot 1 + b) - 2\}^2 + \{(a \cdot 3 + b) - 7\}^2 + \{(a \cdot 2 + b) - 3\}^2 \\ &= 3b^2 + 12(a-2)b + 14a^2 - 58a + 62 \\ &= 3\{b + 2(a-2)\}^2 + 2a^2 - 10a + 14 \\ &= 3\{b + 2(a-2)\}^2 + 2\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって, D が最小となるのは,

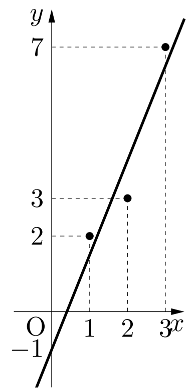
$$b + 2(a-2) = a - \frac{5}{2} = 0$$

のときであるから,

$$a = \frac{5}{2}, \ b = -1$$

したがって, 求める回帰直線の方程式は

$$\underline{y = \frac{5}{2}x - 1} \qquad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$



この方程式を用いて $x = 4$ のときの y の値の予測値を求めると,

$$y = \frac{5}{2} \cdot 4 - 1 = \underline{9} \qquad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

練習 2.1: 回帰直線の方程式 (最小二乗法)

二つの変量 x, y について, 右表のようなデータが得られた。このデータを用いて, x から y を予測する回帰直線の方程式を, 最小二乗法により求めよ。また, 作成した回帰直線の方程式を用いて, $x = 4$ のときの y の値を予測せよ。

x	1	2	0
y	7	2	9

コラム 2.1: 最小二乗法

変量 x, y の平均をそれぞれ $\overline{x}, \overline{y}$, x の標準偏差を s_x, x と y の共分散を s_{xy} とするとき, 最小二乗法によって求めた回帰直線の方程式は,

$$y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x}(x - \overline{x})$$

表されることが知られている。

コラム 2.2: 重回帰分析

気温 x からアイスクリームの売上数 y を予測する方程式を考えたが, 例えば, 気温の他に湿度 w のデータもあって, こちらも y と相関があるような場合に, x と w の 2 つの変量の値から y の値を予測する方程式, たとえば

$$y = ax + bw + c$$

のような方程式を考えることもある。このように, 複数の変量の値からある変量の値を予測する分析方法を, 重回帰分析という。これに対し, 本文中で扱った, 1 つの変量の値から予測する分析を単回帰分析ということもある。

2　微分方程式による数理モデル

2.1　数理モデルと微分方程式

自然現象や社会現象などを数学的に表現したものを**数理モデル** (mathematical model) という。

たとえば, 浴槽に 1 秒間に 2(L) の割合で水を注ぐ。入れ始めてから t 秒後に浴槽に溜まっている水の量を x (L) とすると,

$$x = 2t$$

という関係が成り立つ。これも数理モデルである。微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

となる。時間に伴って変化する量を予測するためのモデルを作成する際には, (2.1) のように, 導関数を含む方程式を用いることが多い。未知の関数とその導関数を含む方程式を**微分方程式**（differential equation）という。

2.2　1 つの例 (SIR モデル)

数理モデルの 1 つの例として, 感染症の流行の推移を予測するために, 生化学者ケルマックと軍医で疫学者のマッケンドリックによって 1927 年に発表された SIR モデルを簡単に紹介する。[1]

対象となる全人口を N, 1 人の感染者が単位時間あたりに接触する人数の平均を C, 1 人の感染者が非感染者に接触したときに相手に感染させる確率を p とする。このとき全人口における非感染者の割合は $\dfrac{S}{N}$ であるから, 単位時間あたり (t が 1 増加する間) に 1 人の感染者が接触する非感染者の人数の平均は $C \cdot \dfrac{S}{N}$ 人である。したがって, 単位時間あたりに 1 人の感染者が新たに感染させる人数は $pC \cdot \dfrac{S}{N}$ となるから, 単位時間あたりの新規感染者数は

$$pC \cdot \frac{S}{N} \cdot I = \frac{pC}{N} \cdot SI$$

[1] S, I, R はそれぞれ susceptible, infected, recoverd の頭文字である。

となる。ここで, 簡略化のため, $\beta = \dfrac{pC}{N}$ とすると, β は定数であり, 単位時間あたりの新規感染者数は βSI と表される。よって, 単位時間あたりに感染者数は βSI だけ増加し, 非感染者数は βSI だけ減少する。

また, 1 人の感染者が単位時間あたりに回復する確率を γ とすると, 単位時間あたりの新規回復者数は γI と表される。よって, 単位時間あたりに回復者数は γI だけ増加し, 感染者数は γI だけ減少する。

以上のことから, 次の等式が成り立つ。

SIR モデル

SIR モデル時刻 t におけるある感染症の未感染者の人数を S, 感染者の人数を I, 回復により免疫を獲得した者の人数を R とすると,

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad , \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

ただし, β, γ は定数。

微分方程式を数学的に解くのは一般に難しい。そこで, コンピューターを用いて単位時間ごとの変量の値を計算することがよく行われる。例えば, 単位時間を 1 日とし, 感染症が広がり始めてから n 日目の未感染者数を S_n とすると, その翌日（$n+1$ 日目）の未感染者数はそれぞれ S_{n+1} で表されるから, n 日目から $n+1$ 日目の感染者数の変化率は,

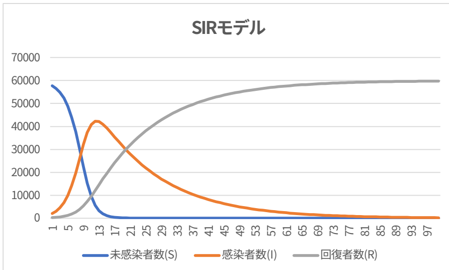
$$\frac{S_{n+1} - S_n}{(n+1) - n} = S_{n+1} - S_n$$

で表される。同様に, n 日目の感染者数, 回復者数をそれぞれ I_n, R_n とすると, 感染者数の変化率, 回復者数の変化率はそれぞれ $I_{n+1} - I_n$, $R_{n+1} - R_n$ で表されるから, SIR モデルの微分方程式の代わりに, 漸化式

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= -\beta S_n I_n \\ I_{n+1} - I_n &= \beta S_n I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} - R_n &= \gamma I_n \end{aligned}$$

を用いて S_n, I_n, R_n の値の変化を考えていく。初期条件 (S_1, I_1, R_1) を与え, 漸化式を繰り返し用いることで, $(S_2, I_2, R_2), (S_3, I_3, R_3), \cdots$ を順に計算していく。以下は, 表計算ソフトを用いた SIR モデルのシミュレーションの例である。

f_X	=F2+$B$1*E2*F2-$B$2*F2						
	A	B	C	D	E	F	G
1	β	0.00001		日	S	I	R
2	γ	0.06		1	57750	2000	250
3				2	56595	3035	370
4	N	60000		3	54877.3	4570.6	552.1
5	C	15		4	52369.1	6804.5	279.2
6	p	0.04		4	48805.7	9959.7	687.5



セル B1 に β の値を，セル B2 に γ の値を入力する。E1,F1,G1 の各セルに S_1,I_1,R_1 の各値を入力する。例えば, 全人口を 60000 人, 1 日目の感染者数を 2000 人, 回復者数を 250 人とするとき, 非感染者数は 57750 人であるから，セル E2 に 57500，セル F2 に 2000，セル G2 に 250 を入力する。セル E3 に=E2-$B$1*E2*F2 セル F3 に=F2+$B$1*E2*F2-$B$2*F2 セル G3 に=G2+$B$2*F2 をそれぞれ入力する。セル E3 からセル G3 までを選択して「コピー」, セル E4 からセル G101 までを選択して「貼り付け」すると, 1 日目から 100 日目までの非感染者数, 感染者数, 回復者数の推移が計算される。

セル D1 からセル G101 までを選択し,「折れ線グラフ」をかく。

練習 2.2

上のシミュレーションにおいて, 1 日目の感染者数, 及び β や γ の値をいろいろな値に変更し, グラフの変化を観察せよ。

3 ゲーム理論

3.1 ゲーム理論

ゲーム理論 (game theory) とは社会や自然界における複数主体が関わる意思決定の問題や行動の相互依存的状況をゲームに見立てた上で, 数学的なモデルを用いて研究する学問である。数学者ジョン・フォン・ノイマン (John von Neumann) と経済学者オスカー・モルゲンシュテルン (Oskar Morgenstern) の共著書「ゲームの理論と経済行動」(Theory of Games and Economic Behavior) (1944 年) によって始まったと言われている。フォン・ノイマン「社会的ゲームの理論について」(On the Theory of Games of Strategy)(1928 年) が始まりだという説もある。

3.2 囚人のジレンマ

ゲーム理論の説明でよく取り上げられる例に「**囚人のジレンマ** (prisoner's dilemma)」と呼ばれるものがある。ちなみに, ジレンマとは 2 つの選択肢のどちらを選んでもなんらかの不利益があり, 態度を決めかねる状態のことである。囚人のジレンマとは以下のようなものである。

例 2.1: 囚人のジレンマ

同じ犯罪に関わった 2 人の囚人が, 別々に取り調べを受けている。2 人は互いに連絡を取り合うことはできない。この状況で, 調査官が次のような「司法取引」を持ちかけてきた。

- 2 人とも黙秘を続ければ 2 人とも懲役 2 年。
- 1 人のみが自白すれば, 自白した囚人は釈放, 黙秘した囚人は懲役 10 年。
- 2 人とも自白すれば, 2 人とも懲役 5 年

2 人の囚人はそれぞれ「自白」「黙秘」のどちらの行動を取るべきか。

2 人の囚人を A, B とし, 囚人のジレンマを右表のような数学的なモデルで表す。ゲームに参加する者 (ここでは 2 人の囚人) をプレイヤー, プレーヤーがとることのできる行動（ここでは「黙秘」と「自白」の 2 つ）を戦略という。

表 2.2: 囚人のジレンマのモデル

(A, B)	黙秘	自白
黙秘	$(-2, -2)$	$(-10, 0)$
自白	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

全てのプレイヤーの戦略の組に対する各プレイヤーの利得（満足の度合い）を 1 つの実数で表す。戦略の組が 1 つ決まると利得の値がただ 1 つ決まるので, 利得は戦略の関数である。これを**利得関数** という。例えば, A の利得関数を f_A とすると,

$$f_A(\text{黙秘}, \text{自白}) = -10$$

のようになる。

最適反応とナッシュ均衡

相手が選ぶ戦略に対して, 自分の効用を最優先する戦略のことを**最適反応** という。囚人のジレンマにおいてプレイヤー A の立場に立って考えると,

- B が黙秘したとすると, A は黙秘すると効用の値は-2, 自白すると利得は 0 となるため, 自白した方が得
- B が自白したとすると, A は黙秘すると利得は-10, 自白すると利得は-5 となるため, 自白した方が得

となるため, いずれの場合も A にとっての最適反応は「自白」である。B についても同様に, 最適反応は「自白」である。

各プレイヤーの最適反応の組を**ナッシュ均衡** という。囚人のジレンマにおけるナッシュ均衡は (自白, 自白) である。あるプレイヤーがナッシュ均衡から単独で戦略を変更すると, そのプレイヤーは必ず損をする。

パレート改善とパレート効率的

全てのプレイヤーの利得を減らすことなく, 少なくとも 1 人のプレイヤーの利得を増加させることを**パレート改善** という。

囚人のジレンマにおいて, 2 人の戦略を (自白, 自白) から (黙秘, 黙秘) へ変更すると, 2 人とも利得が増加するため, この変更はパレート改善である。一方, (黙秘, 黙秘) から (自白, 黙秘) に変更すると, A の利得は増加するが B の利得が減少するため, この変更はパレート改善ではない。(黙秘, 黙秘) からはどの組に変更してもパレート改善にはならない。このように, これ以上パレート改善できない戦略の組を**パレート効率的** という。実は, (黙秘, 自白) や (自白, 黙秘) もパレート効率的である。

3.3 様々な例

例 2.2: 価格競争

同じ製品を製造している 2 社について, 一方のみが値下げすると, そちらの商品が売れる, 両方が値下げすると値下げした分, 利益が失われる。

表 2.3: 価格競争のモデル

(A, B)	値下げ	維持
値下げ	$(-2, -2)$	$(0, -10)$
維持	$(-10, 0)$	$(-5, -5)$

例 2.3: 感染症流行下における自粛・外出問題

外出で得られる喜びを 5, コロナ収束によって得られる喜びを 10 としたモデル。

表 2.4:

(A, B)	外出	自粛
外出	$(-5, -5)$	$(5, -2)$
自粛	$(-2, 5)$	$(10, 10)$

練習 2.3: ゲームのモデル作成

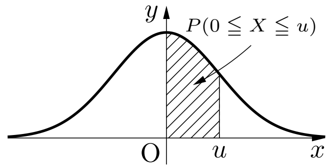
社会や自然界における意思決定問題を 1 つ取り上げてゲームのモデルを作成し, 利得を表 2.2 のように表せ。また, ナッシュ均衡とパレート効率的な戦略の組を答えよ。

コラム 2.3: ちょっと高度な話

ナッシュ均衡は, 数学者ジョン・ナッシュによって提唱された概念である。囚人のジレンマのように, 各プレイヤーが 1 つの戦略を選択するゲームを純粋戦略のゲームといい, ジャンケンのように確率的に戦略を選択するゲームを混合戦略のゲームという。ナッシュは戦略が有限個の混合戦略のゲームには必ずナッシュ均衡が存在することを示した (ナッシュの定理)。このような業績により, ナッシュは 1994 年にノーベル経済学賞を受賞している。

付 録 A　確率分布表

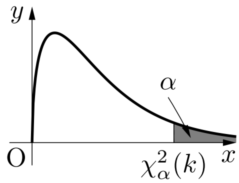
正規分布表



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

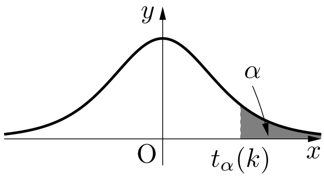
χ^2 分布表

k \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
40	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
60	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
80	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
120	140.2326	146.5674	152.2114	158.9502	163.6482
240	268.4707	277.1376	284.8025	293.8881	300.1822



t 分布表

k \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



索 引

福岡県立鞍手高等学校