

平行光線が任意の曲面で反射してできる焦線の定式化

福岡県立鞍手高等学校理数科
門脇 大我 林 善道
指導教員 中山 英治

要旨

コップに光を当てたときにできる図形である焦線について考察した。特に、コップの側面が単なる円だけではなく様々な曲線の場合について定式化できた。さらに、求めた焦線を再びコップの側面を表す曲線とし、焦線を求めるという作業を繰り返してできる曲線の媒介変数表示について考えた。そして、それらの関数の導関数を定式化することに成功した。

1.序文

ミルクティーの入ったコップに光を当てると、コップの内側で反射した光線が集中して、明るく輝くハートのような曲線ができる。これを焦線という。

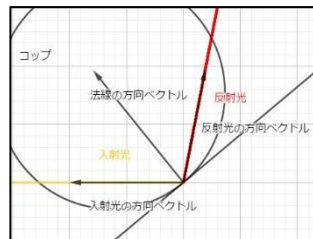


本研究では、媒介変数表示された任意の曲線に平行光線を当てたときにできる焦線の媒介変数表示を求める。

2.前提

先行研究[1]を参考にしつつ、簡略化のために入射光線を平行光線と考えた。よって、本研究では次のことを前提とした。

- コップの内側の曲面を平面曲線 C と考える。
- 入射光線は x 軸の負の方向から曲線 C 上の任意の点に向かう半直線とする。
- 曲線 C 上の任意の点(ただし、特異点を除く)における反射光線は、この点における法線に関して入射光線と対称な半直線である。
- 焦線は、反射光線のつくる包絡線である。



3.主結果と証明

定理.1

媒介変数表示 $x = f(t), y = g(t)$ によって与えられる曲線上の任意の点 $(f(t), g(t))$ における反射光線の方程式を

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

とすると、

$$a(t) = 2f'(t)g'(t)$$

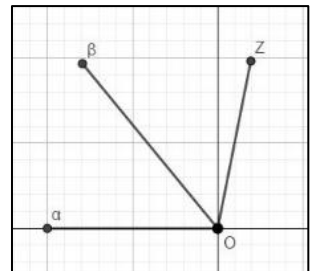
$$b(t) = \{g'(t)\}^2 - \{f'(t)\}^2$$

$$c(t) = -f(t)a(t) - g(t)b(t)$$

で与えられる。

【証明の概要】

任意の点 $(f(t), g(t))$ における光線の入射光線の方
向ベクトルの逆ベクトル、曲
線の法線ベクトルを複素数
平面の点(それぞれ β, α
とする)に対応させ(右図)、



$$z = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

によって反射光線の方
向ベクトルの成分を求め、反
射光線の方程式を求めた。

定理.2

直線群

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

の包絡線を媒介変数表示したものは、

$$x = -\frac{c'(t)b(t) - c(t)b'(t)}{a'(t)b(t) - a(t)b'(t)}$$

$$y = -\frac{c'(t)a(t) - c(t)a'(t)}{b'(t)a(t) - b(t)a'(t)}$$

である。

【証明の概要】

参考文献[3]により，曲線群 $F(x,y,t) = 0$ の包絡線上の点 (x,y) は，

$$F(x,y,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} F(x,y,t) = 0$$

を満たす。

このことを用いると，直線群の包絡線の媒介変数表示は

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

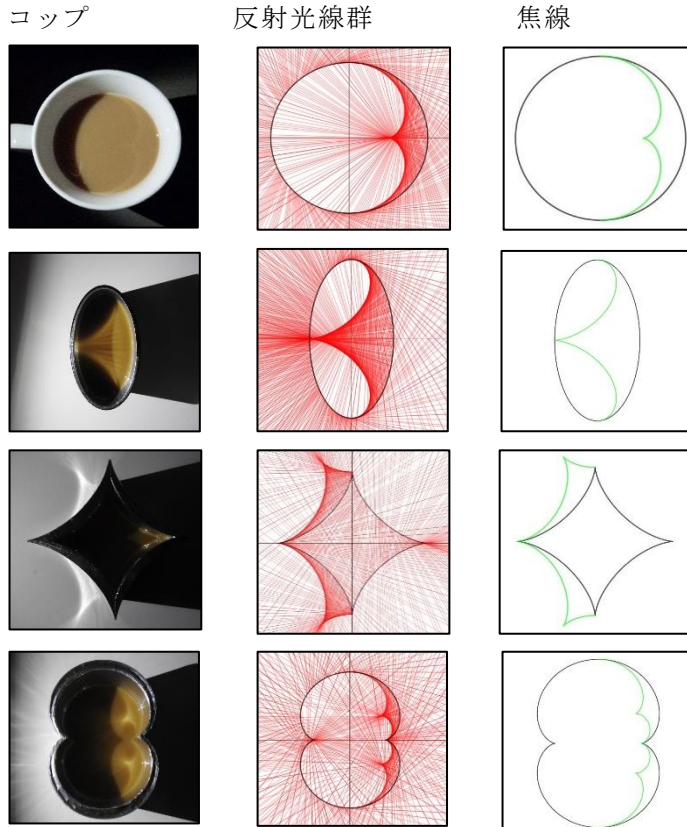
$$a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0$$

の 2 式を x と y についての連立方程式として解くことにより導かれる。

定理.1 と **定理.2** を用いることにより，平行光線が任意の局面で反射してできる焦線を定式化することができる。

4. 検証

3D プリンターで作成した様々な形のコップに光を当てて観測した焦線と，反射光線群をコンピュータで描画したもの，および，本研究の方法により定式化した焦線をコンピュータで描画したものを比較した。反射光線群と焦線の描画には，対話式幾何学ソフトウェアである GeoGebra を用いた。

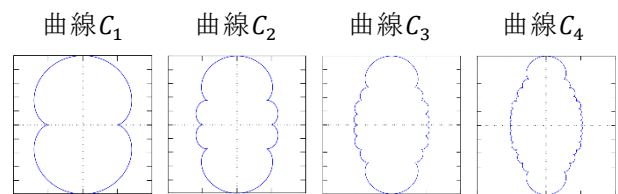


5. 応用

コップの内側を表す曲線を円として焦線を求め，それを曲線 C_1 とする。次に，コップの内側を表す曲線を C_1 として焦線を求め，それを曲線 C_2 とする。以下この作業を繰り返す。すなわち，自然数 n に対し，コップの内側を表す曲線を C_n として焦線を求め，それを曲線 C_{n+1} とする。このときの曲線 C_n の媒介変数表示 $x = f_n(t)$, $y = g_n(t)$ の定式化について考えた。

まず，数式処理ソフト Maxima で $f_n(t)$, $g_n(t)$ を計算し，曲線 C_n の描画を行った。

下図は Maxima で曲線 C_4 までを出力した図である。



Maxima のプログラム

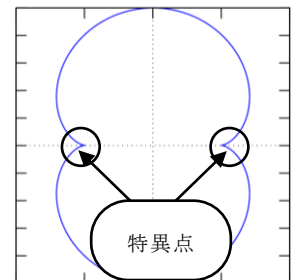
```

define(F(x),cos(x));
define(G(x),sin(x));
m:0;
define(f(x),diff(F(x),x));
define(g(x),diff(G(x),x));
define(A(x),trigsimp(-m*(f(x))^2+m*(g(x))^2+2*f(x)*g(x)));
define(B(x),trigsimp(-(f(x))^2+(g(x))^2-2*m*f(x)*g(x)));
define(C(x),trigsimp(-F(x)*A(x)-G(x)*B(x)));
define(a(x),diff(A(x),x));
define(b(x),diff(B(x),x));
define(c(x),diff(C(x),x));
define(F(x),trigsimp((B(x)*c(x)-b(x)*C(x))/(A(x)*b(x)-a(x)*B(x))));
define(G(x),trigsimp((A(x)*c(x)-a(x)*C(x))/(a(x)*B(x)-A(x)*b(x))));
plot2d([parametric, F(t),G (t), [t, -6, 6], [x,-1,1],same_xy]$,

```

右図は曲線 C_1 である。この図形のとがっている 2 点のことを特異点という。この点は，

$f_1'(t) = 0$, かつ $g_1'(t) = 0$ を満たす点である。曲線の特徴を知るためには導関数を調べることを有効であると考え， $f_n'(t)$ や $g_n'(t)$ も計算してみたところ，次のようになった。



曲線 C_1

$$f_1(t) = -\frac{1}{2}(2 \cos^3 t - 3 \cos t)$$

$$g_1(t) = \sin^3 t$$

$$f_1'(t) = \frac{3}{2} \sin t \cos 2t$$

$$g_1'(t) = \frac{3}{2} \sin t \sin 2t$$

曲線 C_2

$$f_2(t) = -\frac{1}{4}(24 \cos^7 t - 48 \cos^5 t + 31 \cos^3 t - 9 \cos t)$$

$$g_2(t) = 6 \sin^7 t - 9 \sin^5 t + 4 \sin^3 t$$

$$f_2'(t) = \frac{3}{4} \sin t (7 \cos^2 t - 3) \cos 4t$$

$$g_2'(t) = \frac{3}{4} \sin t (7 \cos^2 t - 3) \sin 4t$$

曲線 C_3

$$f_3(t) = -\frac{1}{8}(5376 \cos^{15} t - 21120 \cos^{13} t + 33600 \cos^{11} t - 27744 \cos^9 t + 12666 \cos^7 t - 3153 \cos^5 t + 398 \cos^3 t - 27 \cos t)$$

$$g_3(t) = 672 \sin^{15} t - 2400 \sin^{13} t + 3420 \sin^{11} t - 2472 \sin^9 t + 951 \sin^7 t - 186 \sin^5 t + 16 \sin^3 t$$

$$f_3'(t) = \frac{3}{8} \sin t (210 \cos^6 t - 295 \cos^4 t + 110 \cos^2 t - 9) \cos 8t$$

$$g_3'(t) = \frac{3}{8} \sin t (210 \cos^6 t - 295 \cos^4 t + 110 \cos^2 t - 9) \sin 8t$$

いずれの場合も、 $f_n'(t)$ と $g_n'(t)$ に共通の因数(下線部)が存在する。また、共通因数以外の部分には規則性がある。そこで私たちは、

$$f_n'(t) = P_n(t) \cos 2^n t$$

$$g_n'(t) = P_n(t) \sin 2^n t$$

と表すことができると予想した。そして、次の定理を導くことができた。

定理.3

0以上の整数 n に対し、コップの内側を表す曲線を C_n として焦線を求め、それを曲線 C_{n+1} とする。曲線 C_n の媒介変数表示を $x = f_n(t)$, $y = g_n(t)$ とする。 $f_0(t) = \cos t$, $g_0(t) = \sin t$ とし、すべての自然数 n について、

$$f_n'(t) = P_n(t) \cos 2^n t$$

$$g_n'(t) = P_n(t) \sin 2^n t$$

ただし $P_n(t)$ は

$$P_1(t) = \frac{3}{2} \sin t$$

$$P_{n+1}(t) = \frac{3}{2} P_n(t) \cos 2^n t + \frac{1}{2^{n+1}} P_n'(t) \sin 2^n t$$

という漸化式によって定まる。

【証明】

$$f_n'(t) = P_n(t) \cos 2^n t$$

$$g_n'(t) = P_n(t) \sin 2^n t$$

が成り立つと仮定する。

定理.1 より、

$$a_n(t) = 2f_n'(t)g_n'(t)$$

$$= 2P_n(t) \cos 2^n t P_n(t) \sin 2^n t$$

$$= (P_n(t))^2 \sin 2^{n+1} t$$

$$b_n(t) = -\{f_n'(t)\}^2 + \{g_n'(t)\}^2$$

$$= -(P_n(t) \cos 2^n t)^2 + (P_n(t) \sin 2^n t)^2$$

$$= -(P_n(t))^2 (\cos^2 2^n t - \sin^2 2^n t)$$

$$= -(P_n(t))^2 \cos 2^{n+1} t$$

$$c_n(t) = -a_n(t) f_n(t) - b_n(t) g_n(t)$$

定理.2 より、

$$f_{n+1}(t) = -\frac{c'(t)b(t) - c(t)b'(t)}{a'(t)b(t) - a(t)b'(t)}$$

$$g_{n+1}(t) = -\frac{c'(t)a(t) - c(t)a'(t)}{b'(t)a(t) - b(t)a'(t)}$$

である。これに上の結果を代入して整理すると、

$$f_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} P_n(t) \sin 2^n t \cos 2^{n+1} t + f_n(t)$$

$$g_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} P_n(t) \sin 2^n t \sin 2^{n+1} t + g_n(t)$$

さらに、これらを微分して整理すると、

$$f_{n+1}'(t) = \left\{ \frac{3}{2} P_n(t) \cos 2^n t \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{n+1}} P_n'(t) \sin 2^n t \right\} \cos 2^{n+1} t$$

$$g_{n+1}'(t) = \left\{ \frac{3}{2} P_n(t) \cos 2^n t \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{n+1}} P_n'(t) \sin 2^n t \right\} \sin 2^{n+1} t$$

(証明終)

6. 課題と展望

n をより大きくしたときの焦線の概形を描く。

n を無限大に大きくしたときに至るところが特異点である曲線になることを証明する。

フラクタルとの関連性を調べる。

7. 参考文献

- [1] 井手瑞樹. Caustics の研究, 1993. 兵庫教育大学大学院学校教育研究科 平成 5 年度修士論文
- [2] 井原俊輔 ほか 17 名. 改訂版 新編 数学 III, 数研出版, 2017
- [3] 高木貞治. 解析概論 改訂第三版, 岩波書店, 1964