素晴らしきパラドックスの世界

～キミにこの謎が解けるか！？～

理数科2年　山口　祥兵　宗岡　大貴
岩野　恭子　吉野　雅代

1　主題設定の理由

近年、数学嫌いが進行してきている。私たちはそれを打開すべく、おもしろく、親しみやすい数学の分野………パラドックスをとりあげることにした。この研究を見て、少しでも数学を好きな人が増えることを望む。

2　目的

パラドックスについての知識を得ること。また、それを皆に知ってもらうこと。

3　証明

(1) 1＋1＝1が成り立つというパラドックス

（証明）

$x=1$

両辺にxをかけると、

$x^2=x$

両辺から1をひいて、

$x^2-1=x-1$

左辺を因数分解して、

$(x-1)(x+1)=x-1$

両辺を$(x-1)$で割って、

$x+1=1$

はじめに、$x=1$と書いてあるので、$x=1$を代入して、

$1+1=1$が成り立つ。

（証終）

しかし、この結果が正しいはずがない。次のように考えて先ほどの証明の誤りを証明する。
まず、$(x-1)$で割ってしまったことが間違いである。数式を数式で割るには、(割る数)$\neq 0$である必要がある。それを考えずに$(x-1)$で割ったことにより、$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$の条件が付加される。これは、最初に$x=1$と断っているため、$x\neq 1$との矛盾。また、割ってできた方程式、$x+1=1$は、$x=0$を解に持つため、その式に$x=1$を代入したら成り立たないのは明白である。
よって、$1+1=1$は成り立たない。

(2)アキレスが亀に追いつかないというパラドックス

アキレスは亀と競争をすることにした。亀は足が遅い。アキレスは足が速い。だから、アキレスは亀にハンデが欲しい旨を告げた。アキレスは承諾した。亀はスタート地点よりも先の地点(A 地点とする)からスタートする。一人と一匹は競争を始めた。

スタート後、アキレスが地点 A に達した時には亀はアキレスがそこに達するまでの時間分先に進んでいる(地点 B)。アキレスが今度は地点 B に達したときには亀はまたその時間分先へ進む(地点 C)。同様にアキレスが地点 C の時には亀はさらにその先にいることになる。この考えはいくらでも続けることができ、結果、いつまでたってもアキレスは亀に追いつけないことになる。

しかし、これは明らかにおかしい。足の速い者が足の遅い者に追いつかないはずがない。ここで、アキレスの速さをv_1、亀の速さをv_2とする。また、アキレスがスタート地点から距離Sの地点で亀に追いつくとする。さらに、ハンデとして、S_1だけ亀はアキレスよりも先にいるとする。進行方向を正とする。

速さの比は進んだ距離の比に等しい。よって、アキレスが S_1走る、すなわち、亀のスタート地点に追いついたとき、亀は先に進んでおり、その進んだ距離は、$S_1 \cdot \frac{v_2}{v_1}$ である。また、同様に、

$S = S_1 + S_1 \cdot \frac{v_2}{v_1}$ の地点にアキレスが追いついたとき、亀はさらにその先、

$S = S_1 + S_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} + S_1 \cdot \frac{v_2^{\ 2}}{v_1^{\ 2}}$ の地点にいることになる。いつかアキレスが亀に追いつくとすると、

その地点は、先ほどの考え方を繰り返し、$S = S_1 + S_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} + S_1 \cdot \frac{v_2^{\ 2}}{v_1^{\ 2}} + S_1 \cdot \frac{v_2^{\ 3}}{v_1^{\ 3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ と表される。

ここで、この式を①とする。(①の両辺)$\times \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} S = S_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} + S_1 \cdot \frac{v_2^{\ 2}}{v_1^{\ 2}} + S_1 \cdot \frac{v_2^{\ 3}}{v_1^{\ 3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

となる。この式を②として、①−②を考える。

(① の左辺)−(②の左辺)= $\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) S_1$

(① の右辺)−(②の右辺)= S_1

$\therefore \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) S = S_1$

$\therefore S = \dfrac{S_1}{1-\dfrac{v_2}{v_1}}$ が成り立つ。S はアキレスが亀に追いつく地点なので、この式において S の値が存在するならば、アキレスは亀に追いつくということである。

(i)$1-\dfrac{v_2}{v_1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{v_2}{v_1}=1$ のとき、この式の右辺の分母が0となり、成り立たない。

このとき、アキレスの速さと亀の速さの比が1:1であるということなので、アキレスと亀は同じ速さで走っていることになり、アキレスが亀に追いつかないことは明らかである。

(ii) $1-\dfrac{v_2}{v_1}<0 \Leftrightarrow \dfrac{v_2}{v_1}>1$ のとき、この式の右辺の分母は負の値をとり、S は負の値をとってしまう。

このとき、亀の速さがアキレスの速さよりも大きいということであり、アキレスが亀に追いつけないことは明らかである。

(iii)$1-\dfrac{v_2}{v_1}>0 \Leftrightarrow (0<)\dfrac{v_2}{v_1}<1$ のとき、S の値が定まる。

このとき、アキレスの速さは亀の速さよりも大きいことになり、確かにアキレスは亀に追いつく。

よって、確かに、足の速いアキレスは、足の遅い亀に追いつくことがわかる。

4 まとめ

以上の証明より、「1＋1＝1」が誤りであること、アキレスが亀に必ず追いつかないということが誤りであることが分かった。これからは、見ていること全てが正しいと考えるのではなく、それを実証できるかどうかが重要なのだと考えられるような人間でありたい。

5 感想

山口:今回の研究を通して、あらゆることに疑問を持つことが大切だと感じた。そして、数学に触れることは、とても楽しいことであるとも思った。だから、今回の研究だけにとどまらず、様々な場所で、数学に触れていきたいと思う。

宗岡:『百聞は一見に如かず』が必ずしも正しいとは限らないと思った。だから、見ること全てを鵜呑みにするのではなく、手を休めて、じっくりと吟味してみることも、時には重要なことだと感じた。

岩野:数学はおもしろくないと思っていたけれど、パラドックスにふれて、そのおもしろさに気づいた。このように、まだ自分の知らない楽しい世界を見つけるために、今、自分はがんばっているのだなあと思った。

吉野:数学を少しは好きになれた気がする。そして、そのことが、自然科学への小さな一歩にすぎないのだということに気づいた。「挑戦」とは、何時如何なる状況下であっても、大切なものだと再認識することができ、感無量である。