# 「π」の世界

理数科2年　　奥永 浩輔　　牛島 理博
竹尾 隆善　　鶴 翔史

## 1 主題設定の理由

私たちは普段身近に使っている「π」とは一体何なのかを詳しく知りたいと思いこのテーマを設定した。

## 2 目的

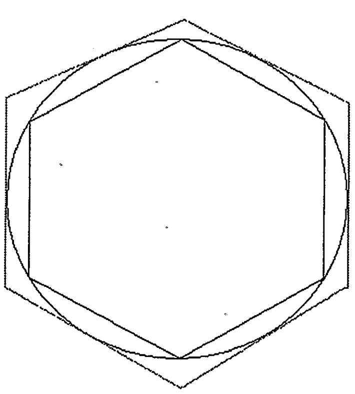
πはどうやって求めることができるのか。また、僕たちが調べたらどのような値になるのかを
知りたかったため。

## 3 πについて

πとは円周率のことで、πという文字はギリシャ文字の周りを表す単語の頭文字だといわれている。これは円周÷直径で表すことができる。現在πの値は1兆 2411 億桁まで計算されていて、1秒に1桁ずつ読んでいくと約4万年かかる。πの中には面白い数列があり、最初から515億桁までに「12345678901」、「7654321987」、「09876543210」、といった数列が、数箇所に見られた。また、πの最初の 10 個の数字「3141592653」は3箇所に見られた。有名なπの研究者の1人であるアルキメデスは、球の表面積と体積、放物線の弦と弧とに挟まれる面積、円周率などを計算によって初めて求めた。また、円に内接する正 96 角形と外接する正 96 角形のそれぞれの辺の長さを計算することによりπの値を約3. 1416であると求めた。

## 4 πの値の求め方

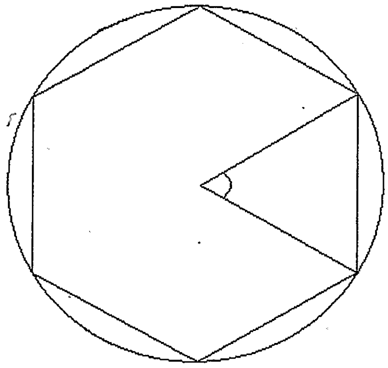
(1)アルキメデスのように、正多角形からπを求める。
円の内側と外側に接する正多角形を描くとこのようになる。(例:正六角形)



円周は、内接する正多角形の周の長さより長く、外接する正多角形の周の長さより短い・・・①
円周＝直径×πから、直径が1の円では、円周＝π・・・②

①、②の関係を使って正 96 角形の場合を考える。

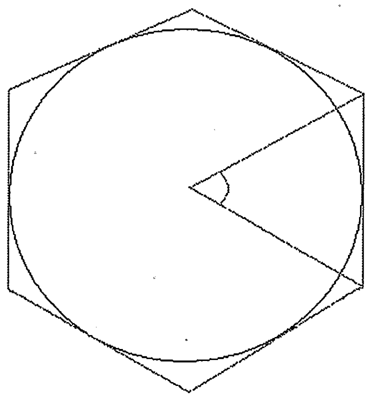
まず、内接する正 96 角形について考える。



ここでは、分かりやすく正6角形を使っているが、どの正多角形の場合でも同じである。
補助線を引き、それによってできた三角形について考える。
図に示した角度を $\theta$ とすると、周となる辺の長さは $\sin\frac{\theta}{2}$ となる。

したがって、内接する正 96 角形の周の長さは $96\sin\frac{\theta}{2}$ となる。

次に外接する正 96 角形について考える。



補助線を引き、それによってできた三角形について考える。

図に示した角度を $\theta$ とすると、周となる辺の長さは $\tan\frac{\theta}{2}$ となる。

したがって、外接する正 96 角形の周の長さは $96\tan\frac{\theta}{2}$ となる。

よって、

$$96\sin\frac{\theta}{2} < \theta < 96\tan\frac{\theta}{2}$$ となる。

ここで、$\theta = 360° \div 96 = 3.75°$ であるので、この値を代入すると

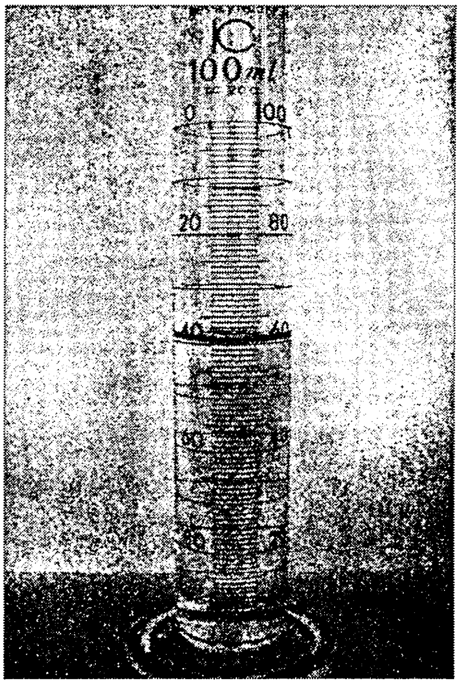
**3.140986・・・・＜π＜3.142805・・・** となる。

(2) 身近なもの(ビー玉)を使って $\pi$ の値を求める。

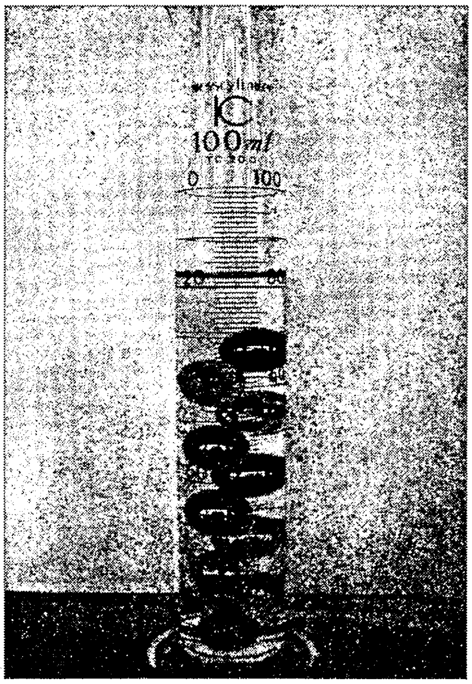
(用意するもの)

・100ml メスシリンダー　・ノギス　・ビー玉×10

1、ビー玉 10 個をノギスでひとつずつ測る。
　その結果からビー玉1個の直径の平均値を出す。
2、100ml メスシリンダーを使いビー玉 10 個の体積を測る。
　あらかじめ 60ml の水を入れたメスシリンダーの中にビー玉 10 個入れると



→



メスシリンダーの目盛りは 82ml を指した。
よって、ビー玉 10 個の体積は 22ml

これらの実験より、
・ビー玉 1 個の直径の平均値は1.619cm
・ビー玉 1 個の体積の平均値は2.2ml

これらの結果より、球の体積の公式を使い π を求めると

**3. 110522770600911659961183517709 6・・・**

となった。
3.1 までしか合わなかったが、実際の値に近いものを求めることができた。

## 5 何故「π」が「3」ではいけないのか！？（π＝3 の不合理の証明）

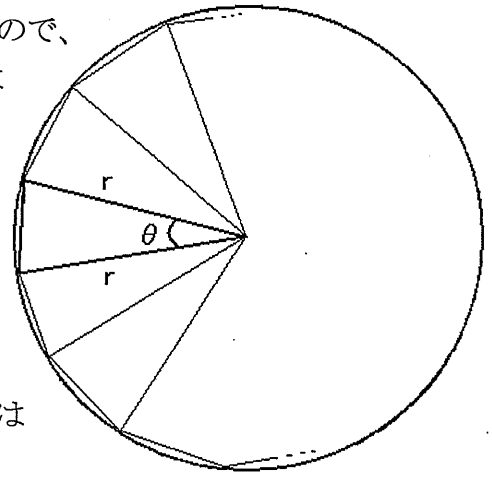
「π」がなぜ「3.14」とめんどくさい数字を使っているのかということについて調べてみた。
皆さんはゆとり教育によって円周率が「3.14」から「3」になったということを耳にしたことがあるのではないだろうか。
しかし、円周率が「3」になるという話は、まったくの嘘であり、小学校の算数の指導で円周率が「3」になるということはない。つまり、今の小学生も私たちと同じように円周率を「3.14」として習っている。
別に円周率が「3」でもいいのではないかと思うかもしれない。そこで、円周率が「3」と「3.14」

の違いを示したいと思う。

ここで円と内接する多角形の面積について考えてみる。
当然内接する多角形の面積は円の面積より小さいはずなので、
円周率$\pi$を3とすると、半径をrにした場合、円の面積Sは

$$S=\pi\ (=3)\times r\times r$$
$$=3r^2$$

と表すことができる。
ここで、円に内接する正n角形があるとする。
円の中心からそれぞれの頂点に線分を引く。
そしてそのうちの一つの三角形について考える。
図のように角度を$\theta$、半径をrとすると、この三角形の面積は




$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

$\theta$は360°／nであり、この三角形がn個であるので円に内接する正n角形S'は

$$S'=\frac{1}{2}r^2\sin\frac{360°}{n}\times n$$

円の面積と多角形の面積の差は$r^2$でくくって

$$S-S'=r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n}\times n\right)\cdots①$$

ここで正6角形を考えてみる。
①の式の右辺に n=6を代入すると

$$r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{6}\times 6\right)$$

$$=r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin 60°\times 6\right)$$

$$=r^2\left(3-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\right)$$

$$=r^2\left(\frac{6}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)>0$$

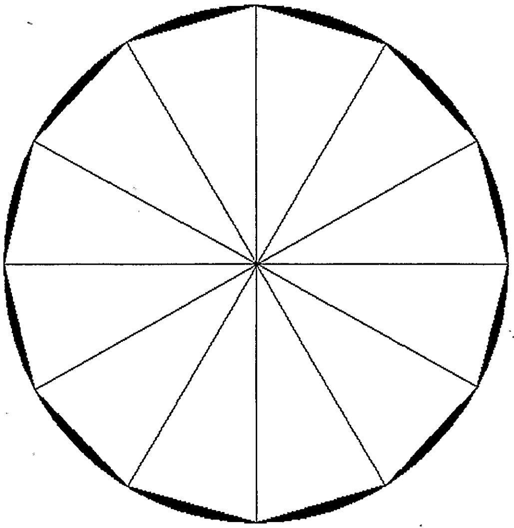
括弧の中は0より大きいので、これは円の面積の方が大きいことがわかる。
次に正12角形を考えてみる。
①の式の右辺に n=12を代入すると

$$r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin\frac{360^\circ}{12}\times 12\right)$$

$$=r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin 30^\circ\times 12\right)$$

$$=r^2\left(3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 12\right)$$

$$=0$$



となり、円と内接する正 12 角形の面積が等しくなってしまう。

そうすると実際はあるはずの右図の黒い部分がなくなってしまう。

最後に正 24 角形を考えてみる。

①の式の右辺に n＝24を代入すると

$$r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin\frac{360^\circ}{24}\times 24\right)$$

$$=r^2\left(3-\frac{1}{2}\sin 15^\circ\times 24\right)$$

$$=r^2\left(3-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times 24\right)$$

$$=r^2\{3-\ 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})\}<0$$

括弧の中は 0 より小さいので、これは多角形の面積の方が大きいことがわかる。

このようにnが 13 より大きくなってしまうと、多角形の面積が円の面積より大きくなってしまう。

正 12 角形など現実味がないので、どうでもよいと思われるかもしれないが、時計の文字盤を多角形にすると 12 角形になる。これが円と同じ面積といえるはずがない。

（$\pi$ ＝3.14 となると、正 114 角形で円の面積を超える）

**このことから・・・「$\pi$」は 3 ではいけない！！**

## 6 まとめ

今回、僕たちは「$\pi$」を自分達なりの方法で調べてみたところ、「3.14」という値を出すことはできなかったが、近い値を出すことができた。また、今回の課題研究を通して分からないことを自分たちで調べ、理解することの大切さを学んだ。

## 7 感想

奥永 ： πという不思議な数字を研究してみて、数学の奥の深さにびっくりした。これから数学を勉強していく中で、また違った角度から数学に取り組んでいけると思う。

牛島 ： 私たちは3．1415という詳しい値までだすことができなかったが、3．14まではだすことができたので、よかった。これまで小学生のときからπを使ってきたが、今回の課題研究でπの見方が少し変わった気がする。

竹尾 ： 今回の課題研究で、πの値の求め方、なぜπ＝3ではいけないのか、など今まで触れたことのなかった「πの世界」に触れることができた。円に内接する正多角形と円に外接する正多角形からπの値を求めるとき、計算はとても大変だったけれど、計算結果が出て、それが実際の値に近いものが出たときはとても嬉しかった。

鶴 ： 僕は小さい頃から「π」に興味を持っていましたが、今回の課題研究で調べていうちにますます「π」の神秘的なところを感じました。これから、まだまだ解明されていくで あろう「π」について少し深く知ることができて嬉しく思いました。