曲線の王様

～サイクロイドの不思議～

理数科2年　長谷川　歩唯　　三小田　亨弘
坂東　恭平

1．主題設定の理由

数学の授業で関数を習い、様々な曲線がでてくるなかで、サイクロイド曲線という曲線が最速降下曲線という名前をもっているという事実を知り、その特徴を詳しく調べてみたいと思ったからである。

2．目的

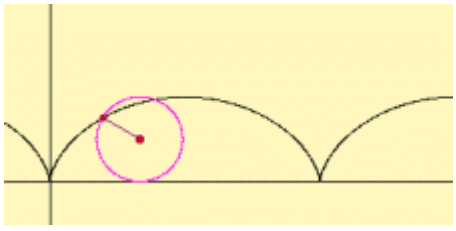
サイクロイド曲線について、その利用方法や特徴を調べ、わかりやすくまとめる。

3．仮説

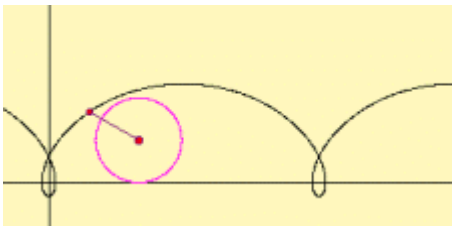
サイクロイド曲線は最速降下曲線である。

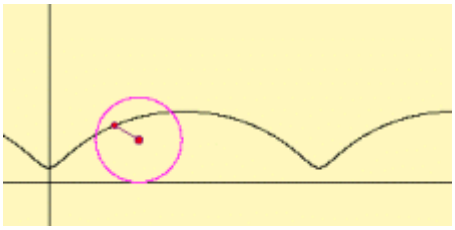
4．実験（証明）

○ “サイクロイド曲線“とは？
直線上を円が滑らないで転がるとき、その円の円周上の定点が描く軌跡を“サイクロイド曲線”という。



この定点が円周上でなくて，円の内部にあったり外部にあったりしても似たような曲線が得られる。これを「トロコイド」という。

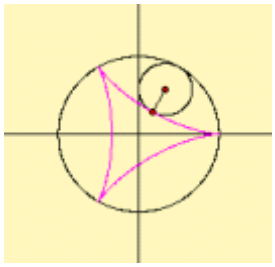


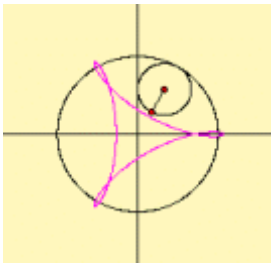


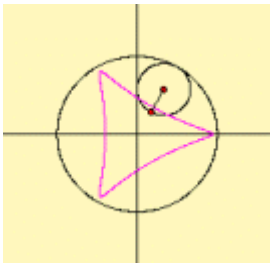
○ 内サイクロイドと外サイクロイド

円が定円のとき、円が定円の内側を周に沿って転がるとき、その円周上の点が描く軌跡を「内サイクロイド」という。さらに円が定円の外側を転がるときその円の円周上の点が描く軌跡を「外サイクロイド」という。また定点を定円の内部、外部にとることにより「内トロコイド」、「外トロコイド」が得られる。

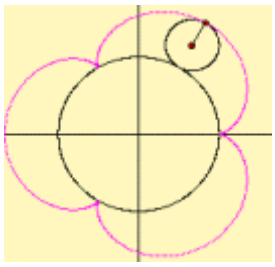
～内サイクロイド～

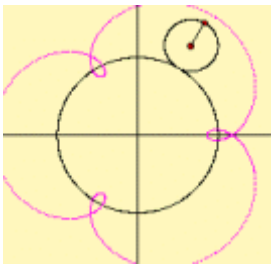


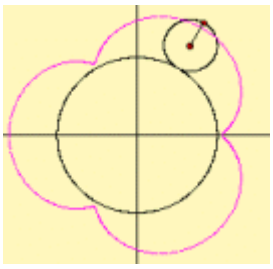




～外サイクロイド～

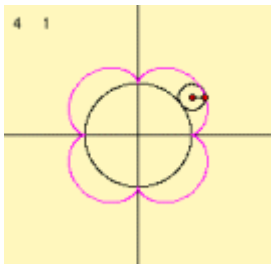




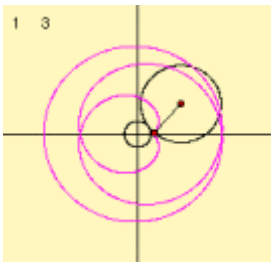


定円上を転がる円が描くサイクロイドは、定円と動く円の半径の比率によって様々な形を描く。

例）　定円の半径:円の半径＝4:1



定円の半径:円の半径＝1:3



これらの関係をまとめると次のようになる。
　　定円の半径と動円の半径の比率をmとする

1. mが正の整数のとき、定点の周りの外回りのm個の枝からなる

2. mが負の整数のとき、定点の周りの内回りのm個の枝からなる

3. mが分数のとき動点は、有限個の枝を描いて最初の状態に戻る

4. mが無理数のとき、複雑な動きになり、枝の数が無数になる

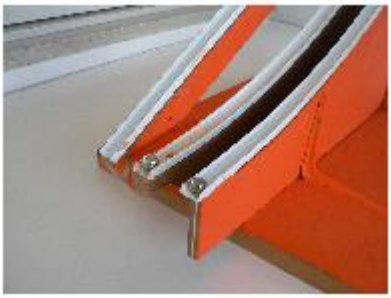
〇サイクロイド曲線の特徴

サイクロイド曲線の特徴に、高さが違うところから物体を滑らせても最下点で等しい位置なるという性質がある。それを証明したものが、次の実験がある。

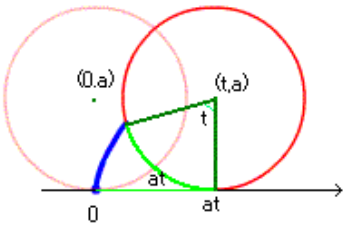
＜実験1＞

サイクロイド曲線の形をしたレールを2つ並べたものを用意する。それぞれのレール上に、同じ質量で同じ大きさの小球を、別々の位置に置く。同時に手を離すと最下点を通過するときは同時である。よって、サイクロイド曲線上の違う高さから物体を滑らせても最下点では同位置になる。

手を離す→



〇サイクロイド曲線の公式



上の図のように、X 軸の正の方向に距離 at だけ回転したとき、円の中心角は t（ラジアン）となる。従ってこのとき点の座標は、a を円の半径とすると次の公式が成り立つ。

$$x=a(t-\sin t)$$
$$y=a(1-\cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

〇サイクロイド振り子

サイクロイド曲線を利用したものにサイクロイド振り子がある。（上図）サイクロイド振り子の特徴は、“等時性”が保たれる事である。

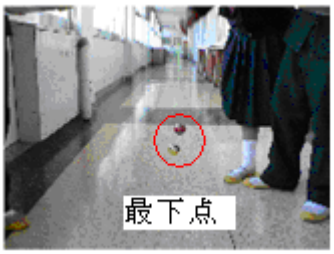
＊等時性とは＊＊

振り子では質点が最低点の近くから出発したときは、質点はあまり速くならないで振動するが、高い位置から出発すると急な斜面で大きく加速されるために大きな速さで振動する。これらの周期が等しくなることを等時性という。サイクロイド振り子の等時性を証明した実験は次のとおりである。

＜実験2＞

サイクロイド振り子を用意する。ふたつのおもりを別々の高さから手を離す。二つの振り子は、最下点で同時にすれ違う。これは二つのおもりの周期が、質量や手を離す位置に関係なく等しくなるためである。よってサイクロイド振り子は等時性が成り立っている。

手を離す→



〇最速降下曲線

サイクロイドは別名「最速降下曲線」とも呼ばれる。 これは、重力場のもとで質点が、ある2点間 A,B を最も短い時間で走り抜けることのできる曲線であるという意味だ。その理由を証明するための実験は次のとおりである。

＜実験３＞

サイクロイド曲線の形をしたレールと普通の直線の形をしたレールを横に並べたものを用意する。直線のレールとサイクロイド曲線のレール上に、それぞれ同じ高さから、同じ大きさで同じ質量の小球を置く。同時に手を離すと、サイクロイド曲線上に置いた小球の方が早く落ちてくる。つまり、小球は直線よりサイクロイド曲線上の方を早く走りぬけたことになる。

これは他の曲線と比べても成り立ったので、サイクロイド曲線は最速降下曲線といえる。

手を離す→

5．まとめ

- サイクロイド曲線は円が直線上、または定円上を動くとき、その円周上にある点が描く軌跡のことである
- サイクロイド曲線は2点間を最短で走りぬけることができる曲線で、最速降下曲線と呼ばれている

6．感想

長谷川：私の人生の中で、これほど数学と深く向き合ったことは今までありませんでした。サイクロイド曲線は、物理学的側面もふくんでいて、文献は豊富で調べやすかったのですが、公式を理解し、証明していくのはとても大変でした。しかし難しいことに直面し、それをより奥深く考えることができ、それはこれからの学校生活において役立つ経験ができたと思います。また班員と協力して研究することはとても楽しく、よい思い出ができました。これからはこの課題研究で学んだように、自分の興味関心の追及に挑戦していきたいと思います。

三小田：僕はこの課題研究を通していろいろなことを知ることができました。今回の班でテーマとしたサイクロイド曲線は物理にも関連があり、数学を今までと違った視点から見ることができたと思います。他にもいろいろな教科に数学を生かすことができるかもしれないのでこれから機会があれば調べてみたいです。僕たちの班は発表をすることができなかったが、普段できない貴重な経験ができたと思います。

坂東：私はこの課題研究でさまざまなことを学びました。ひと口にサイクロイド曲線と言っても証明の方法がたくさんあり、その性質の利用方法も多様であることに驚きました。また、サイクロイド曲線は、数学の分野だけでなく、物理の分野でも使われていて、数学と物理の関係の深さも知ることができました。たくさんのことを知ることができ、とても有意義な課題研究でした。