期待値

～賢く生きるために～

理数科2年　松岡　遼平　野口　雄也
林　純平　二村　俊輔

1　主題設定の理由

私たち数学3班は秋山　仁先生の講義のビデオを見て期待値について強く興味を持ったため、自分たちの身近な所で期待値が用いられている例を調べてみることにした。すると私たちの予想していた以上に期待値が私たちの生活の多くの場で用いられていることを知った。

今回のテーマを設定した理由は、期待値が私たちの生活のなかで密接に関わりあっているものについて調査し、数学を用いて賢い生き方というのを見出したいと考えたからである。

2　目的

まずは宝くじ、競馬といった身近に存在する公共ギャンブルを対象に期待値を調査し、得た結果からそれらの損得を理解する。次に期待値を応用することでお見合いの損得を知ることができるのか研究を行い理解を深めるなかで数学の実用性に触れ、最終的には日頃の生活のなかでを数学を用いることができるようにする。

3　期待値とは

ある試行の結果として、いくつかの場合があり、それぞれの場合で受け取れる金額などが違うとき、それぞれの場合の「確率×受け取れる金額」の合計を期待値と言う。

4　研究内容

(1)ギャンブル篇

①　宝くじ

宝くじの期待値は、実際に行われた年末ジャンボ宝くじの当選確率、配当金を用いて、一口あたりの期待値を求めてみることにした。下の表は、当選確率と、配当金を表したグラフである。

等級	当選確率	配当金
一等賞	1/10, 000, 000	200, 000, 000円
前後賞	1/5, 000, 000	50, 000, 000円
組違賞	1/101, 101	100, 000円

二等賞	1/2，500，000	100，000，000円
三等賞	1/100，000	100，000円
四等賞	1/100	3，000円
五等賞	1/10	300円
特別賞	1/1000	10，000円

このとおりでそれぞれの場合で期待値を出してみると、

ⅰ）一等賞の時

200,000,000×1/10,000,000＝20

ⅱ）前後賞の時

50,000,000×1/5,000,000　＝10

ⅲ）組違賞の時

100,000×1/101,010　≒1

ⅳ）二等賞の時

100,000,000×1/2,500,000　＝40

ⅴ）三等賞の時

100,000×1/100,000　＝1

ⅵ）四等賞の時

3,000×1/100　＝30

ⅶ）五等賞の時

300×1/10　＝30

ⅷ）特別賞の時

10,000×1/1,000　＝10

ⅰ）～ⅷ）より

20＋10＋1＋40＋1＋30＋30＋10＝142円

よって、300円あたりの期待値が142円、100円あたりだと47円とわかった。

② 競馬

競馬についての期待値は、単勝オッズのみの計算とする。今回は実際に札幌競馬場で行われたレースの単勝オッズを、13の枠それぞれについて、次の欄に記した。

枠	最終オッズ①	②＝1/①	確率分布③	真のオッズ	期待値
			③＝②/1，2667	③の逆数	最終オッズ／真のオッズ
1	71,9	1,39%	1,10%	91,07	0,789
2	2,2	45,45%	35,89%	2,79	0,789
3	34,6	2,89%	2,28%	43,83	0,789
4	89,4	1,12%	0,88%	113,24	0,789
5	5,1	19,61%	15,48%	6,46	0,789
6	8,1	12,35%	9,75%	10,26	0,789
7	6,4	15,63%	12,34%	8,11	0,789
8	46,3	2,16%	1,71%	58,65	0,789
9	25,7	3,89%	3,07%	32,55	0,789
10	43,4	2,30%	1,82%	54,97	0,789
11	150,1	0,67%	0,53%	190,13	0,789
12	19,5	5,13%	4,05%	24,70	0,789
13	7,1	14,08%	11,12%	8,99	0,789
計		126,67%	100,00%		0,789

この数字から、競馬の期待値が推定できる。

①は、実際のオッズである。②では、①を逆数にして、一着になる可能性を出す。この値が大きくなると、一着になる可能性が高くなる。しかしながら、確率は、全体で1にならないといけないので、このままでは期待値を出すことができない。そこで、③では全体で1、つまり100％になるように②の値を1，2667で割り、各枠の確率分布を出す。すると、一度逆数にしたので、元に戻すと、真のオッズが出てくる。最後に、最終オッズから真のオッズを割ると、期待値が現れる。このレースでは、期待値は78，9でしたが、オッズによって期待値が変わってくる。それでも平均して75円の期待値を得ることができた。

（2） お見合い篇

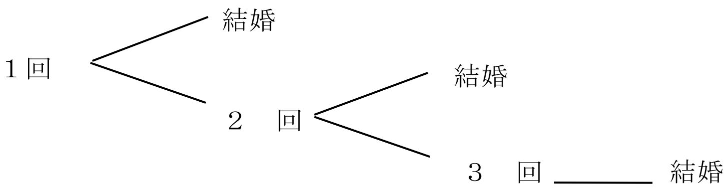
「ギャンブル篇」で期待値の現実的な利用の仕方はわかったと思う。それではもうひとつ例を挙げてみたいと思う。

私たちは秋山氏のビデオなどを参考にお見合いをするにあたって以下のような設定をした。そして、どうすれば一番自分のタイプの人と結婚できるのかを計算した。

〈ルール〉

・これから三回だけお見合いをする。

・この人と決めたら次のお見合いはできない。なお、3回目は、自動的に決定される。



・自分の勝手な判断により相手のレベルを良い順から1～6で決める。

・どのレベルの人が来る確率も同様とする。

・相手から断られることはない。

まず私たちは、一般的に考えられそうな[1]～[3]までのタイプについて考えた。

[1]強気タイプ・・・1回目、2回目のお見合いでレベル 1 以外なら断る。

（解）　全体の期待値は

$$\frac{1+5\times(2\text{ 回目の期待値})}{6} \quad \cdots\cdots①$$

2回目の期待値は

$$\frac{1+5\times(3\text{ 回目の期待値})}{6} \quad \cdots\cdots②$$

3回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

なので、

②に代入して

$$\frac{1+5\times3.5}{6}=3.0833\cdots$$

①に代入して

$$\frac{1+5\times 3.0833\cdots}{6}=2.7361\cdots\fallingdotseq 2.74$$

よって、全体の期待値はおよそ 2.74 となる。

[2]中流タイプ・・・1回目、2回目のお見合いでレベル5，6なら断る。

(解)　全体の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+2\times(\text{2回目の期待値})}{6}\quad\cdots\cdots①$$

2回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+2\times(\text{3回目の期待値})}{6}\quad\cdots\cdots②$$

3回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

なので、

②に代入して

$$\frac{1+2+3+4+2\times 3.5}{6}=2.8333\cdots$$

①に代入して

$$\frac{1+2+3+4+2\times 2.8333\cdots}{6}=2.6111\cdots\fallingdotseq 2.61$$

よって、全体の期待値はおよそ 2.61 となる。

[3]弱気タイプ・・・1回目、2回目のお見合いでレベル6なら断る。

(解)　　全体の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+5+(2\text{回目の期待値})}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

2回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+5+(3\text{回目の期待値})}{6} \quad \cdots\cdots ②$$

3回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

なので、

②に代入して

$$\frac{1+2+3+4+5+3.5}{6}=3.08333\cdots$$

①に代入して

$$\frac{1+2+3+4+5+3.0833\cdots}{6}=3.0138\cdots \fallingdotseq 3.01$$

よって、全体の期待値はおよそ 3.01 となる。

以上三つの計算の結果、もっとも自分のタイプの人と結婚できると期待されるものは一番値が小さい[2]中流タイプである。しかし、これはあくまでも一般的に考えられるものの中で期待値が最も小さいものである。私たちは無数にある考え方からもっとも期待値が小さい考え方を探し、値を求めた。

[4]戦略家タイプ･･･　1回目のお見合いの相手がレベル1、2以外、2回目の相手がレベル4、5、6だったら断る。

(解)　　全体の期待値は

$$\frac{1+2+4\times(2\text{回目の期待値})}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

2回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+3\times(3\text{回目の期待値})}{6} \quad \cdots\cdots ②$$

3回目の期待値は

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

なので、

②に代入して

$$\frac{1+2+3+3\times 3.5}{6}=2.75$$

①に代入して

$$\frac{1+2+4\times 2.75}{6}=2.3333\cdots \fallingdotseq 2.33$$

よって、全体の期待値はおよそ 2.33 となる。

つまり、[4]戦略家タイプでは、相手のレベルが 2.3 の人と結婚できると期待され、中流タイプより小さい値が出た。

5 まとめ

ギャンブル篇では、宝くじと競馬を比較してどちらのほうが100円あたりの期待値が多いか計算をしてみた。宝くじは約47円、競馬は約75円という結果になった。どちらとも当選金や倍率で異なってくることがあるが、宝くじを買うより、競馬で賭けるほうが計算上よいことが分かる。他のものも調べてみたが、競輪、競艇などは、競馬と同様約75円だった。それには理由があり、少なくとも総額の75%は、配当金として支払われる仕組みになっていたのである。

お見合い篇では、普通のお見合いとは少しかけ離れていて実感がわかない部分があると思われる。実際には、このようなお見合いはないということを前提に計算をした。お見合いだけでなく、他にもこのような考えで選び出せばよいことはあるので、そのときに判断してもらいたい。いくらたくさん選ぶ方法があっても最終的に決めるのはあなたたち次第なのである。

世の中にはさまざまな事項があるが、そのときによって、確率の理論が使えるかどうかは分からない。ましてや時と場合によっては期待値も大幅に変わってくる。最終的にはあなた方の判断によるが、今回述べた期待値による考え方も頭の隅にでもおいて判断してもらいたい。

6 感想

松岡　遼平：今回いろいろなものの期待値を出してきたが、普段何気なく買ってしましそうなものも数学で学んだ知識を使うと、それだけでも大きく結果が変わってしまうこともあるんだなと思った。実際にやってみないと結果は分からないが、賢く得をしようと思うはとても大切だと思う。今回の経験をこれからに活かしてまたこのような研究をしてみたいなと思う。

野口　雄也：最初「期待値」というテーマを選んだとき、基本的なことは中学でも習う簡単な内容で、研究ができるのか心配だったが、身の回りには期待値で応用できるものが意外と身近にあって親近感を覚えた。私たちは他の班と違い、「実用的」という観点で研究を行ったので、何かを突き止める喜びを味わうことはなかったが、充実した研究を行うことができた。これからも数学を身近なものから発見し、応用させていきたいと思う。

林　純平　：発表会で研究内容を発表することはできなかったが、研究の中で数学の面白さ、また普段の授業では知ることのできない多くの実用性を発見することができとても貴重な体験ができたと思う。今回の課題研究での経験を今後の学習、また生活の中で活かしていきたいと思うし、今後またこのメンバーで期待値をテーマにもっと研究を進めてみたいと感じる。

二村　俊輔：この課題研究で、宝くじや競馬、お見合いの期待値を求めてとても役立った。宝くじや競馬の期待値は予想以上に高かった。しかし、期待値がその程度であっても、実際に宝くじや競馬をやると、その期待値分だけ返ってくることは少なく、返ってきたとしても損で、また、大金があたる確率は非常に低いので、最も賢く生きるということは、賭け事に没頭しないことかもしれないと研究をしながら思った。