

フラクタル

～摩訶不思議アドベンチャーな数学の世界～

理数科2年 中村 彰吾 毛利 一彩
許斐 公太 長谷川 匠

1、主題設定の理由

何をしようかと悩んでいるとき、K君が「フラクタル」が面白いと塾の先生に吹き込まれたのが、事の発端。しかし、「フラクタル」とは何かと調べているうちに、面白くなり、幾何学の虜になってしましました。

幾何学中毒になってしまった僕たちは、もっと「フラクタル」を学びたい…この想いから、僕たちの波乱万丈な課題研究がはじまりました。

2、目的

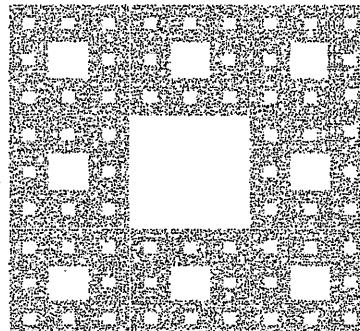
フラクタルという幾何学についての知識を深める。具体的にフラクタルの含まれている例、図形を探して、その図形などについて詳しく調べる。最終的には実際に自分達の手でフラクタル図形を作ってみる。

3、研究過程

最初のころは、フラクタルというものは自己相似性を持つ图形だと思っていました。しかし、研究を進めていくうちにそれだけではなく次元が関係していることが分かりました。そこで僕たちは、もつと詳しく調べました。そして、次元には位相次元とハウスドルフ次元というものがあることが分かりました。そして、フラクタルにはハウスドルフ次元が関係していることを知り、さまざまなフラクタル図形の次元を調べました。

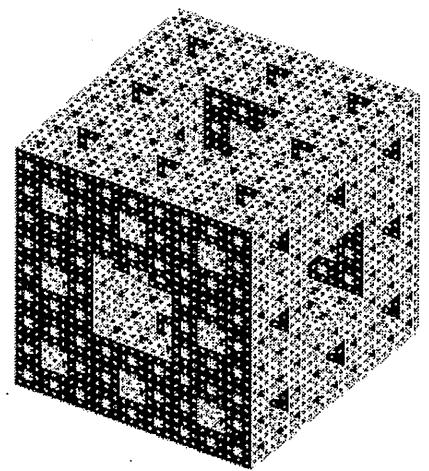
(1) シェルピンスキーカーペット

この图形はシェルピンスキーカーペットといいます。
これは正方形の一辺を三等分して真ん中以外の正方形で同じ作業を繰り返して書かれたものです。
この图形の次元は約1.9527次元です。



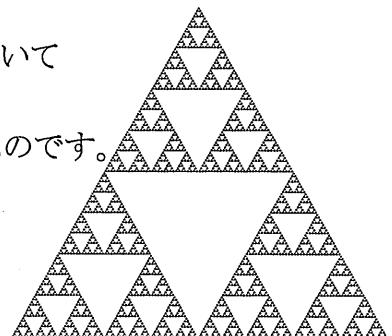
(2) メンガーノのスponジ

この図形はメンガーノのスponジです。
これはさつきのシェルビンスキーのカーペットをつなげて立体的にしたもので
す。
この図形は2次元と3次元の間の次元をもつ、珍しい図形です。
今のところ、これ1つしか発見されていません。
この図形の次元は2.7268次元です。



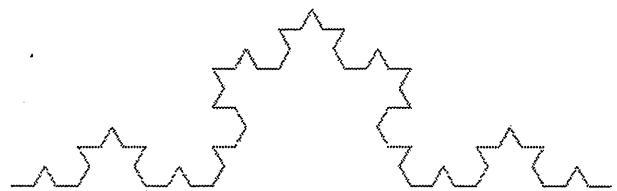
(3) シェルビンスキーのギャスケット

この図形はシェルビンスキーのギャスケットです。これはまず正三角形を描いて
その正三角形の各辺の中点をとり、それを結びます。
すると、逆三角形1つと三角形が3つできるので同じことを繰り返して書いたものです。
この図形の次元は約1.585次元です。



(4) コッホ曲線

これはコッホ曲線です。コッホ曲線の描き方は1本の線分を用意し、この線分を3等分する真ん
中の線分を消して、その部分へ3分の1からなる正三角形の2辺を追加する。この作業を何度もくり
返します。次元は約1.26次元です。



4.まとめ

フラクタルというのは簡単に言うとハウスドルフ次元で考えると整数次元にならない図形です。普通の次元では、線を一次元、面を二次元、立方体を三次元と定義しています。しかし、ハウスドルフ次元というのは、対数を用いて計算をして線や面の次元を出すことを言います。正方形や球といった当たり前の図形では、ハウスドルフ次元と位相次元は一致しますが、複雑な図形では異なる場合があります。このような異なる次元をフラクタル次元と言います。身近なものを挙げると、海岸線の長さがあります。海岸線の長さを測ろうとする場合、より小さい物差しで測れば測るほど、大きなものさしでは無視されていた微細な凹凸が測定されるようになります。したがって、このような図形の長さは無限であると考えられます。このような図形を評価するために導入されたのが、整数以外の値にもなるフラクタル次元です。その他にも、メンガーのスponジ、シェルピンスキイのギャスケット、コッホ曲線等があり、これらについても全て複雑な図形です。フラクタル図形はこの他にもたくさんあるようですが、僕達では見つけることができませんでした。しかもフラクタルを深く知るために、複雑な計算を解くことが必要だったので僕達はフラクタルの一部しか知ることができませんでした。

5.感想

長谷川

僕は、最初の方はフラクタルのことが全然分からなくて「何で俺がこんなことせないかんのか！！」と思っていました。でも、研究を続けていくとフラクタルのことがだんだん分かつて面白いとまではいかなくとも、あまりキツイとは思わなくなりました。発表も自分なりに頑張りました。ただ、最初からもっとしっかりやっていたら、もっといい発表ができたかもと思うと少し残念です。たぶんこの課題研究で少しは変わったと思います。この課題研究で学んだことをこれからの中学校生活に活かしていきたいと思います。

中村

課題研究を始めた頃は、みんな何をすればいいのか分からず、全く進みませんでした。しかし、フラクタルを調べることになり、その難しさに驚き、全く理解できませんでした。でも、フラクタルを調べていくうちに、フラクタルの語源や発見した人、フラクタルの定義などを知り少しほは理解したつもりです。それにフラクタルについてもっと知りたくなり、みんなが理解できるような詳しい説明ができるようになりたいと思いました。

毛利

僕は、課題研究を通して、フラクタルについて学ぶことができました。特に印象に残っているのは、発表には使われなかつたけど海岸線がフラクタル次元になっていることです。その他にも身近にたくさんフラクタル次元が存在していることを知り、驚きました。フラクタル図形は、どれも複雑な図形ばかりで作図にとても苦労しました。

許斐

僕は、最初面白そうという理由だけでフラクタルについて調べようと提案しました。でも、調べてみるととても難しくてみんな苦労したと思います。僕たちの班は、正直かなり不真面目なヤツらの集まりで、最初はちゃんとできるとは少しも思っていませんでした。実際最初は僕もみんなもぜんぜんヤル気がなくて、ダラダラやっていました。でも、発表が決まってからはみんなきちんとやっていました。やり始めるのが遅いと思われるかもしれません。たしかにヤル気になるのは他の班よりはるかに遅かったです。でも、ヤル気になってからの集中力は他のどの班にも負けないと思います。そして、ほとんど1からのスタートだったのに発表に間に合わせることができました。この課題研究を通して、僕は何に対してでも一生懸命取り組むことの大切さを知りました。この課題研究は自分にとって、とても価値のある経験になりました。この経験をこれからの学校生活やそれ以外のところにも役立てていきたいと思います。