フィボナッチ数列

～知られざるフィボナッチ数列の不思議～

理数科2班　江上 翔吾　桃田 崇裕
木下 智世　安田 由佳子

1 主題設定の理由

(1) さまざまな法則があるというフィボナッチ数列について具体的にどのような法則があるか詳しく知りたいと思ったから。

(2) フィボナッチ数列は日常生活や自然界に潜んでいると知り興味を持ったから。

2 目的

フィボナッチ数列の性質を知り日常生活や自然界でどのようなものがあるか調べる。

3 研究内容

(1) フィボナッチ数列について

自然界に生きる多くの生物が『フィボナッチ数列』の規則に従っている。フィボナッチ数列とは隣り合う二つの数を加えると、次の数に等しくなり、数字を書き並べてみると、

1、1、2、3、5、8、13、21、34、55・・・

<このフィボナッチ数列の特徴>

- 3番目ごとの数は偶数。
- 4番目ごとの数は3の倍数。
- 15番目ごとの数は0で終わる。
- フィボナッチ数列の階差数列もフィボナッチ数列。
- フィボナッチ数列中のある数の二乗とその数の前後の積の差は1。

(2) フィボナッチ数列の一般項

フィボナッチ数列は前2項の和なので、漸化式は $A_{n+1}=A_n+A_{n-1}$ となる。

これを利用して、特性方程式を使って一般項を求めます。

特性方程式は $X^2=X+1$（すなわち $X^2-X-1=0$）で、これを満たす二つの解 α、β は $\{\alpha+\beta=1、\alpha\beta=1\}$ を満たします。

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}-\alpha A_n &= \beta(A_n-\alpha A_{n-1}) \\
&= \beta^2(A_{n-1}-\alpha A_{n-2})=\cdots\cdots \\
&= \beta^{(n-2)}(A_3-\alpha A_2)=\beta^{(n-1)}(A_2-\alpha A_1) \\
&= \beta^{(n-1)}(1-\alpha) \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

α，β の役割を入れ替えて

$A_{n+1} - \beta A_n = \alpha^{(n-1)}(1-\beta)$ ……②

①、②の辺々を引算して $(\beta-\alpha)A_n = \beta^{(n-1)}$

ここで $\alpha+\beta=1$ なので $(\beta-\alpha)A_n = \beta^{(n-1)}(\beta) - \alpha^{(n-1)}(\alpha) = \beta^n - \alpha^n$

$\therefore A = \beta^n - \alpha^n / \beta - \alpha$

仮に $\beta > \alpha$ とすれば $\beta - \alpha = (1+\sqrt{5}/2) - (1-\sqrt{5}/2) = \sqrt{5}$ なので、

一般項は $A_n = (1/\sqrt{5})\{(1+\sqrt{5}/2)^n - (1-\sqrt{5}/2)^n\}$ というような複雑な式になります。

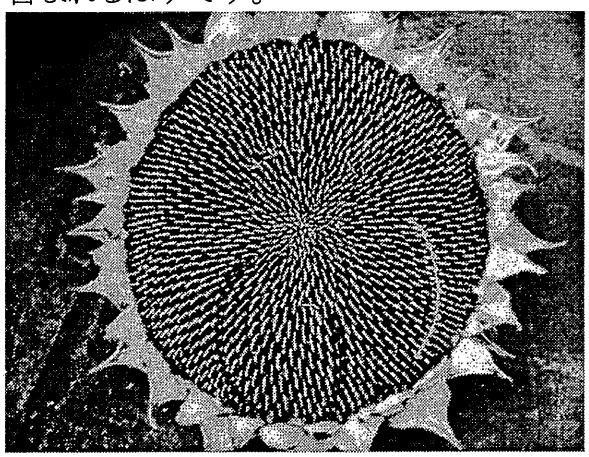
(3) 自然界のフィボナッチ数列

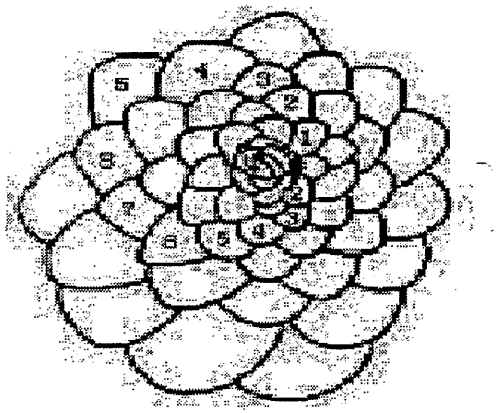
[1] 自然界に潜むフィボナッチ数列

フィボナッチ数の法則性を生きた自然の中に見出そうとすれば、この数は、さまざまな螺旋の形で自然界のようなところにも現れてくる。

・ ひまわり

ヒマワリについて種の並び方に注目すると写真のように整然と並んでいることがわかります。黄色、緑、赤のらせん毎に、このヒマワリには全体で何本あるのかを調べてみると、それぞれ 34 本、55 本、89 本となります。螺旋の本数はフィボナッチ数列に含まれていることがわかります。このことは偶然ではなく、これより小さなヒマワリで観察しても螺旋の本数は減ってもその数はフィボナッチ数列に含まれるはずです。





・ 松かさ

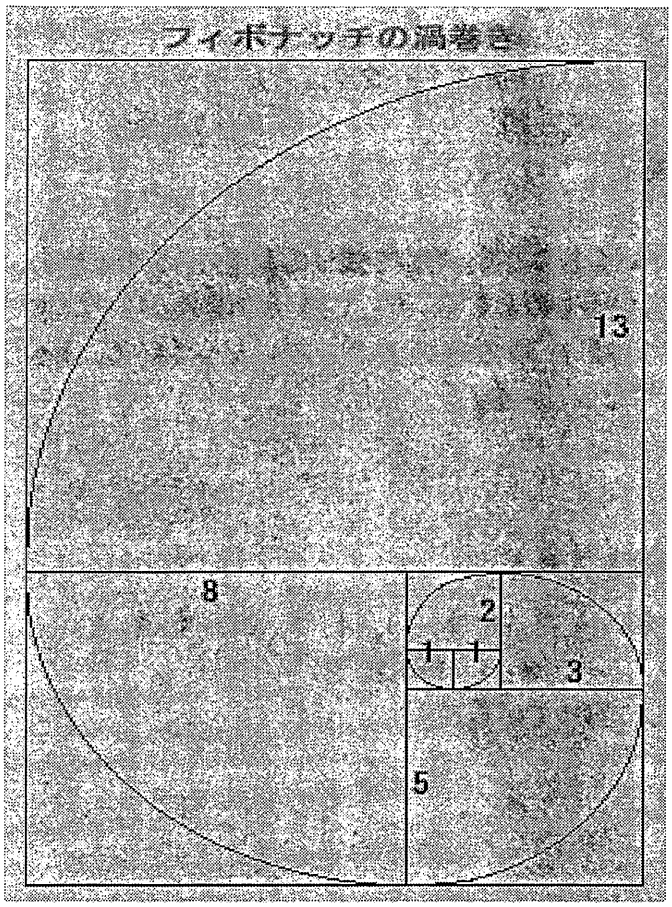
松かさは螺旋状に並んでいて、右回りに数えると8個づつ、左回りに数えると 5 個づつになっている。最も小さな松かさであれば、5 個と 3 個になっている。

このようにして、松かさの配置の中にもフィボナッチ数列は隠れている。

・ [2] フィボナッチの渦巻き

フィボナッチ数(1、1、3、5、8、13)を一辺とする正方形を、隣へ隣へと書いていき

最後に4／1回転度に円を描くようにつなぐとフィボナッチの渦巻きがあらわれる。



このようにしてできたフィボナッチ数列は『フィボナッチの長方形』と呼ばれている。
フィボナッチの渦巻きは以下のように私たちの身近なところに隠れている。

<自然界に潜むフィボナッチの渦巻き>

- カタツムリの殻　　・台風の渦巻き
- オウム貝　　・渦巻きの中の水の流れ
- サザエ　　・星雲の渦巻き

(4) 身の回りのフィボナッチ数列

[1] 階段の例

n段の階段があるとする。その階段を 1 段ずつ、または 1 段とばして上がるとする。
するとその上り方は・・・

n＝1のとき (1)　・・・1通り
n＝2のとき (1, 1)、(2)　・・・2通り
n＝3のとき (1, 1, 1)、(1, 2)、(2, 1)　・・・3通り
n＝4のとき (1, 1, 1, 1)、(2, 2)、(2, 1, 1)、(1, 2, 1)、(1, 1, 2)　・・・5通り
n＝5のとき (1, 1, 1, 1, 1)、(2, 2, 1)、(1, 2, 2)、(2, 1、2)、
(1, 1, 1, 2)、(1, 1, 2, 1)、(1, 2, 1, 1)、(2, 1, 1, 1)　・・・8通り

n＝6のとき（1，1，1，1，1，1）、(1,1,1,1,2)、(1,1,1,2,1)、(1,1,2,1,1)、
(1,2,1,1,1)、(2,1,1,1,1)、(1,1,2,2)、(1,2,2,1)、(2,2,1,1)、
(1,2,1,2)、(2,1,2,1)、(2,1,1,2)、(2,2,2)　　・・・13通り

・・・と結果が第 2 項目からのフィボナッチ数列になる。

〈理由〉

n 段の階段があるとき、初めに 1 段上っているものとる。そして残りの段を n−1 のときの上がり方をする。また、はじめに 2 段上がっているものとする。そして残りの段を n−2 のときの上がり方をする。その2つの上がり方の合計は n 段の時の上がり方になっている。よって、前 2 項の合計からなるフィボナッチ数列になっている。

〈例〉n＝4のとき


にn＝3を入れる＋

にn＝2を入れる

n＝3のとき（1，1，1）、(1，2)、(2，1）→（1，1，1，1）、(1，1，2)、(1，2，1）
n＝2のとき（1，1）、(2)　　→（2，1，1）、(2，2）
この2つの合計はn＝4のときの5通りになっている。

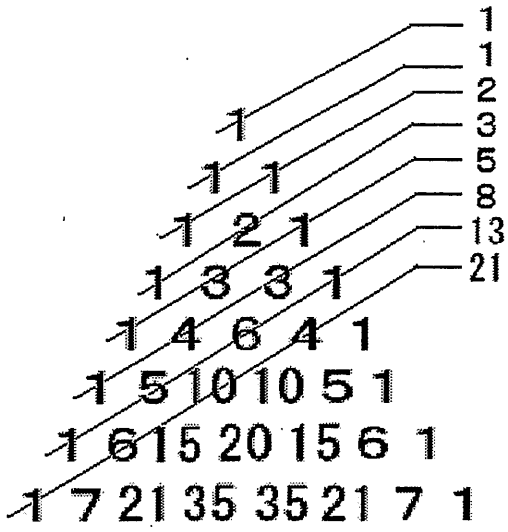
[2] パスカルの三角形

パスカルの三角形の中にもフィボナッチ数列が隠れている。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

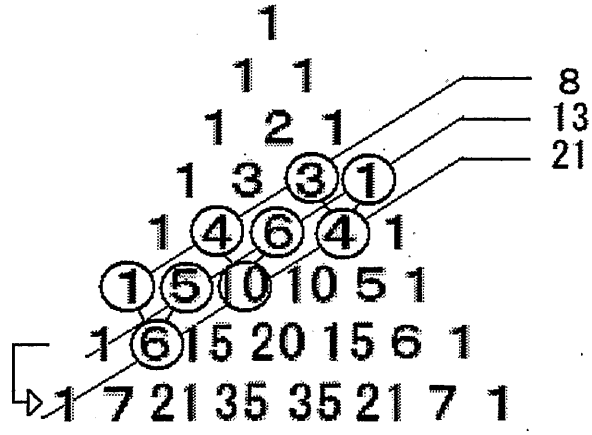
これがパスカルの三角形。

そしてこの中のフィボナッチ数列は・・・・



ここ。

なぜここにフィボナッチ数列が現れるのかというと、パスカルの三角形の特徴の1つに隣り合う2数の合計はそのしたに表れるという特徴があるので、



こうなります。

第6項・・・　1＋4＋3＝8
第7項・・・1＋5＋6＋1＝13
第8項・・・1＋(1＋5)＋(4＋6)＋(3＋1)＝21　(第7項の初めの1はそのまま移動)

4 感想

江上…身の回りのフィボナッチ数列を調べていくうちに身の回りのあらゆることに法則性があることに驚きました。今回の研究で数学の奥深さと面白さを改めて感じることができました。

桃田…フィボナッチ数列をぱっと見た感想は複雑で難しそうだと思ったけれど、調べていくうちに少しずつ理解していき、その仕組の面白さに驚きました。

木下…フィボナッチ数列がこんなに自分たちの身近にあるということに驚いた。自然界のものは生存している過程で自ら数列を作り出す事に、大きなパワーを感じました。

安田…調べていくうちに、フィボナッチ数列には、さまざま性質がありフィボナッチ数列の奥深さを知りました。また、自然と数学は、とても密接な関係にあることに驚きました。