黄金比の秘密に迫る

理数科2年　鋤先　昌哉　吉永　綜一郎　藤本　可那子
岡崎　宏晃　井上　大樹

1、主題設定の理由

私達は、以前から授業で聞いたことがある。数Ⅰの教科書の表紙に黄金比に関することが載っている。映画や小説に出てくる。という理由から黄金比とは何か？黄金比がどのような場面に用いられているのか？安定感があり非常に美しいと思われているのはなぜか？と疑問に思った。そして、以上のことから黄金比がどのように定義されておりなぜ様々な分野において多種多様に使われているか黄金比の秘密について調べていくことにした。また、この黄金比に密接に関わっているフィボナッチ数列についても調べてみることにした。

2、目的

研究目的は、黄金比がなぜこのような簡単な値になるのかを証明を通して、求めていくことである。また、古代から現代に至るまでに使われている黄金比が自然界と最も密接であり世の中で最も美しい比だと思われている理由についてそのつながりを考えていきたい。黄金比に密接に関わっていると言われているフィボナッチ数列についても同様に証明や値を通してどのように自然界と関わっているか。黄金比とはどのような関連性があるのかを調べていく。また、自分達が日頃よく使っているものが黄金比になっていないかどうかを実験する。

3、仮説

①黄金比という比は、証明が難しく　とても複雑なものではないのか？
②古代から黄金比は用いられ始め現代、私達が日常生活でよく使っている物・毎日見ている物に隠されているのではないか？
③黄金比と密接に関わっている数学的な定理などはないか？
④自然界と大きく関わっているのではないか？

4、黄金比

1)黄金比について

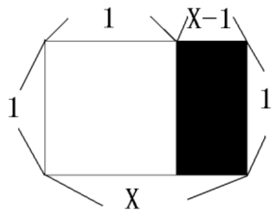
黄金比とは一言で簡潔に表すと$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　小数比約　1:1.618・・・　整数比約　5:8 である。

2)黄金比の証明

ここでは、実際に黄金比の値がなぜ、$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$になるのかを長方形を用いて証明する。

（条件・・・長方形からその短辺を共有する正方形を切り取った残りの長方形と元の長方形が相似になる

長方形。）



問）ここに、縦１　横Ｘの長方形がある。このＸの値が黄金比になっていることを証明せよ。

証明：長方形（縦1横Ｘ）と黒色の長方形（縦１横Ｘ－1）は相似なので

1：Ｘ＝（Ｘ－1）：1　---①

①を解くと（Ｘ -1）＝1

$$X^2 - X - 1 = 0$$ ---②

②を解の公式を用いて解くと

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

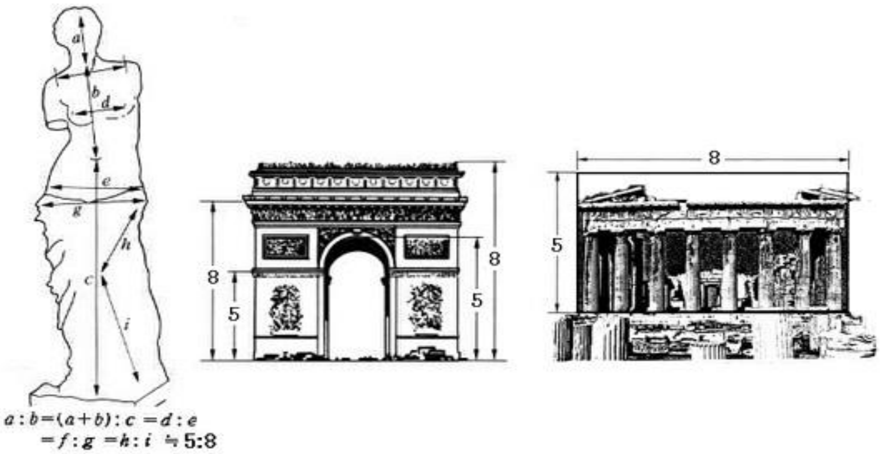
$X > 0$ より

$$X = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

（証明終了）

（この長方形は黄金長方形と呼ばれる。）

3)歴史な美術作品、建築物に隠された黄金比



古代ギリシャの時代に造られた建築物や芸術作品に黄金比が様々な場面で隠されている。ここでは代表的な3つを示している。 ミロのヴィーナス、パリの凱旋門、ギリシャパルテノン神殿である。図のように5：８が隠れていることが分かる。

5、実験

歴史的な建築物ではなく、身近なものには黄金比は無いのか？という疑問から身の回りにある様々なものの縦、横の長さを測り黄金比になっているかを実験した。（四捨五入することで1：１．６になるものを黄金比と定義している。）

	短い方	長い方	短:長	黄金比か
①Wii	13cm	21,4cm	1:1,646	○
②雑巾	19cm	29cm	1:1,526	×
③コンセントカバー	7cm	11,2cm	1:1,6	○
④一万円札	7,6cm	15,4cm	1:1,2026	×
⑤数学教科書	14,9cm	20,9cm	1:1,402	×
⑥学校の机	39cm	58,9cm	1:1,51	×
⑦新聞	41cm	54cm	1:1,131	×
⑧平筑定期	5,4cm	8,5cm	1:1,157	○

6、フィボナッチ数列について

1)フィボナッチ数列とは・・・？

フィボナッチ数列とは次の数列のことを言う。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377・・・

この数列では、直前の 2 項を足すことによって次の項が表れるようになっている。

(例)144＋233=377　　21＋34=55

漸化式: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

〔また、前後の項の比をとっていくと、偶数番目から奇数番目の比は 1,618・・・より大きい値から奇数番目から偶数番目の比は 1,618・・・より小さい値から黄金比に近づいていく。〕

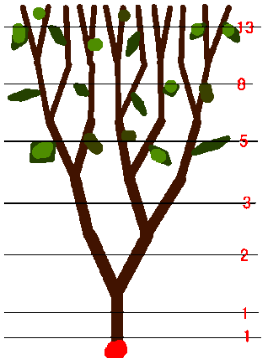
2)証明①(〔　〕部分・・・フィボナッチ数列と黄金比の関連性について)

（証明終了）

3)証明②(一般項を求める)

（証明終了）

4)身の回りにあるフィボナッチ数列



１本の木が１年間かけてこの木の枝が成長し、２年かけて分岐するとおく。

そして、その枝が分かれたところで区切りそれぞれ数えてみると

１，１，２，３，５，８，１３・・・

と成長していく木にフィボナッチ数列が隠されていることが明確である。

学校にあるプラタナスの木も同様に調べてみるとフィボナッチ数列となっていた。
つまり、木の成長にも黄金比が隠されていることが分かる。
円において、円周を黄金比に分けた角のことを黄金角と定義する。木は、太陽からの光を効率よく浴びるために最適に枝を出していく。次の枝を出すためにどの角度が最適かと考えるとどんな角度がいいだろうか？と考えると一周360°の円周を黄金比に分けた黄金角が一番、最適となる。

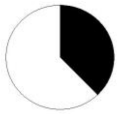
※黄金角について

①値を求める

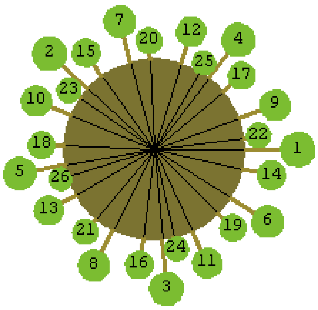
$$360° \times \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 137.507764\cdots$$

この値が黄金角である。

②図で表すと・・・



黒い部分の角度が黄金角である。



図は、黄金角ごとに枝と葉が生えていく様子を示している。
番号を順番に線で結んでいくと螺旋模様になっていく。
すると、隣り合う2つの葉が作る角度は黄金角になっており葉が多く茂っても重なりあう部分が少ない。なので、黄金角で枝葉を出すことで太陽の光を最大限に受けることができる。
調べたところ　ひまわり、松笠、花びらの模様、オーム貝、蜂の巣パイナップルがこの図にあてはまった。

※自然界における生物、植物で成長や環境は多種多様なので例外はたくさんあった。
このように、私達が美しいと感じている生物や植物に黄金比があった。

7、結果

①私達の身の回りにある物･日常生活でよく使う物･毎日使っている物の中にも黄金比が隠されておりとても数学が身近に隠されていることを感じ取ることができた。黄金比は正六角形を美しく書くときにも用いられる。長方形だけではなく、直線を用いて黄金比を証明することもできた。

②数列に関して、今までにあまり詳しく、規則性について考えたことはなかったがこのフィボナッチ数列と呼ばれる数列について証明を授業で扱った漸化式で考えていくことで、とても複雑な計算ばかりではあったがフィボナッチ数列から数列の規則性の奥深さについて考えることができた。

8、考察

図形的、数学的にバランスのとれた形や数値には必ずと言って良いほど黄金比が成り立っている。

また、自然界や歴史的な建築物、美術作品にも様々な形で黄金比が隠されている。以上のことから黄金比は生命に本能的に備わった比率だと思われる。

9、まとめ

黄金比が美しいと感じる理由は・・・人間は自然を見ると美しいと感じる→自然界にたくさんの黄金比が隠されており、建築物などの芸術作品の中にそれらを見出すとき人工物である芸術の印象と自然界の造形の印象が等価である。という安堵感が美しいと思うからである。だから、古代から美しいと思われている比であることが分かり、その美しさを追求していくという目的を果たすことができた。

黄金比はとても簡単な証明であり、長方形以外の図形にも隠されているということが分かった。

フィボナッチ数列に関しては、木の枝・松笠・花びらなどにあり、私達が美しいと感じている植物や木々の中に隠されていることが分かった。とても複雑な数式ばかりの証明ではあったが、授業で習った漸化式や特性方程式を用いることによって、一般項・黄金比との関連性についてしっかりと理解していくことができた。このようにして、数学が自然界と密接なつながりを持っていることが研究できた。

参考文献

ウィキペディア「黄金比」「フィボナッチ数列」 http://ja.wikipedia.org/wiki

おもしろ数学講座 http://www.cwo.zaq.ne.jp/bfaby300/math/fibona.html

黄金比のいろいろ http://gakuen.gifu-net.ed.jp/~contents/museum/golden/page62.html

黄金比と黄金長方形 http://www.kumamotokokufu-h.ed.jp/kokufu/math/ougonhi.html

自然にひそむ数学―自然と数学の不思議な関係 講談社ブルーバックス （佐藤修一）

10、感想

（鋤先）：黄金比とかけましてイチローとときます。そのこころは――――生きる伝説！

（吉永）：黄金比やフィボナッチ数列の複雑な証明を研究することができた。身の回りにあるものにも数学が隠されているということを知ることができ、とても素晴らしい課題研究になった。フィボナッチ数列はとても難しく苦戦したが授業で扱った数列の漸化式などを用いてこんなに難しい証明ができることに驚いた。数学が自然界と大きく関わっていることが分かった。

（藤本）：授業ではでてこない内容の中で、様々な複雑な証明を長い期間をかけて行うことができた。とても難しいなと思ったが、自分が普段使っているものの中にも数学が使われていることを知ることができ難しい数式ばかりではあったが、とてもいい研究になった。

（岡崎）：漸化式の隣接3項間や特性方程式からフィボナッチ数列の一般項が出せたときはとても感動した。黄金比に関しては、長方形の中に黄金比が隠されていることを証明で出すことができ、これほど、簡単な証明で導けるということが驚いた。身の回りにあるものにも黄金比やフィボナッチ数列などが隠されていることを知ることができ、数学の奥深さを追求できた。

（井上）：黄金比ってかっこいいと思いました。かっこよすぎです。ほれちゃいました。