あみだくじの公平性についての一考察

小橋　真紀　大嶋　柔喜　藤重　拡
林　綾乃　飯尾　里沙

1　主題設定の理由

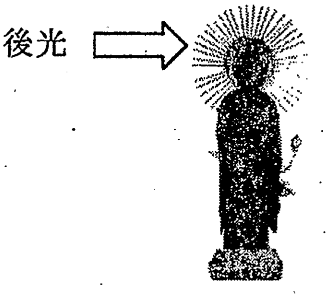
今まで自分たちが何かを決めるときによくあみだくじを使ってきた。ほかのくじよりも手間がかからず、鉛筆と紙があればできるあみだくじ。しかしあるとき、本当にどこを選んでも同じ確率なのか、疑問に思い、調べてみたいと思った。

2　目的

あみだくじの性質を知り、どこを選んでも確率は同じなのか調べる。確率が同じ場合は終了で、違った場合は公平なあみだくじを作る方法を考える。

3　あみだくじの由来

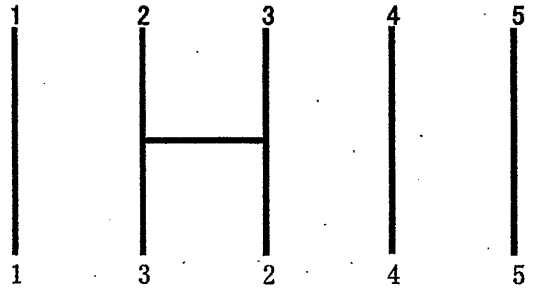
あみだくじは室町時代から行われていて、当時は放射線状に線が引かれていた。この線が阿弥陀仏の後光に似ていたことから「阿弥陀の光」と呼ばれていた。



4　あみだくじの定義

今回私たちが調べたあみだくじは、①上から下に移動　②横棒に出会うとそこで方向転換　という定義のもとで研究をした。

5　あみだくじの性質

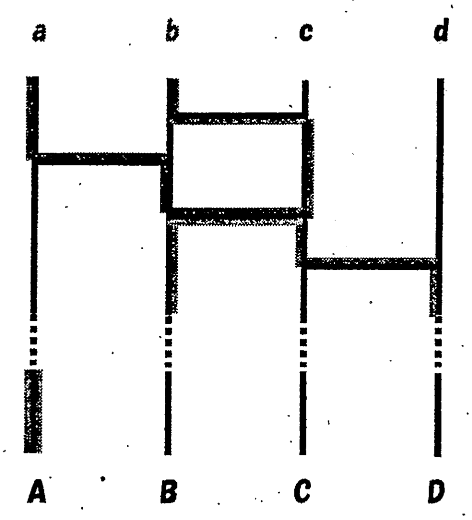


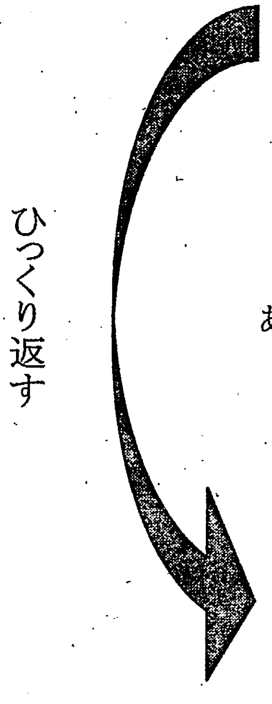
横棒のないあみだくじに横棒を1本2と3の間に引くと、2と3が入れ替わる。この入れ替わりのことを置換という。つまり、あみだくじとは隣り合った2つの場所の置換の繰り返しである。

6　あみだくじの上と下が1対1に対応する証明

（1）背理法

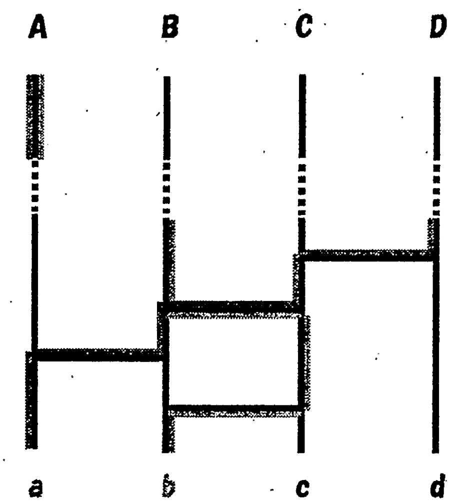
（証）





aとbが2つともAに到達すると仮定する

あみだくじをひっくり返すと



1か所から2つのところに到達することになるので矛盾

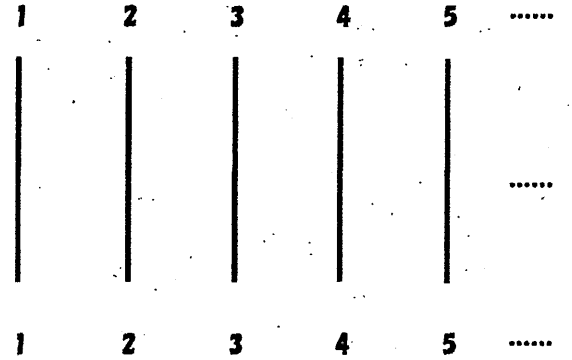
よってあみだくじは1対1に対応する

（終）

(2)数学的帰納法

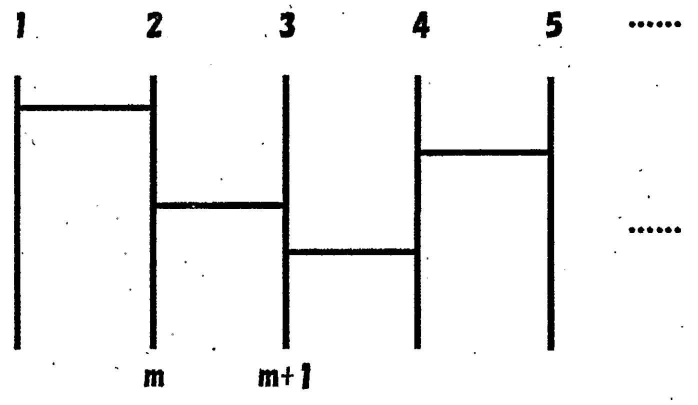
(証)横棒の本数をｎとする

（Ⅰ） n＝0のとき



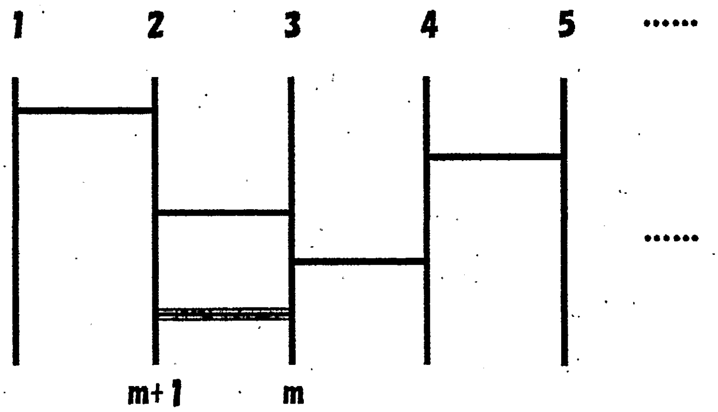
全て同じところに行くので成り立つ

（Ⅱ） n=kのとき成り立つと仮定する



n=k＋1のとき

m番目とm＋1番目の間に横棒を引いたとすると、



m番目とm＋1番目の行き先が入れ替わるだけなので成り立つ

∴ (Ⅰ)(Ⅱ)よりすべての自然数nについて成り立つ

(終)

7　実験1

実際にあみだくじを100個作成した。

(1)作り方

乱数表を用いて縦棒5本、横棒 10 本の 100 個のあみだくじを作った。乱数表とは 0 から 9 までの数字をでたらめに並べた表のこと。

(例)　3　6　1　7　4

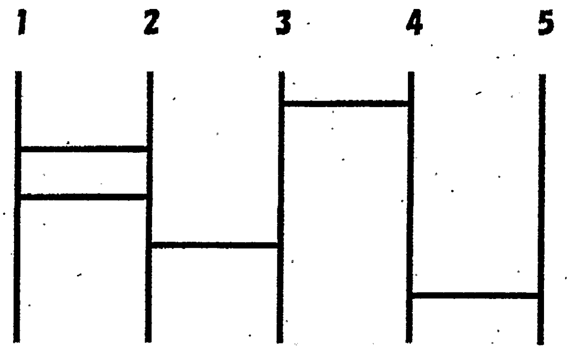
⇩　5で割った余り

3　1　1　2　4

⇩

置換　(3, 4) (1, 2) (1, 2) (2, 3) (4, 5)

この場合このようなあみだくじとなる



5で割った余りが0のところには他の乱数表の数字を入れる。

(2)結果

出発点

終着点	①	②	③	④	⑤
①	32	37	13	10	8
②	34	22	12	19	13
③	17	18	20	21	24
④	7	13	30	19	31
⑤	10	10	25	31	24

表から見てわかるように、出発点から近いところが多く、遠いところが少ない。

8 分析1

実験1の結果を受けて私たちは、あみだくじは公平ではないのではないか、また真下近辺に行く確率が高いのではないかと考えた。

9 実験2

実際に確率を調べてみた。

(1)確率の求め方

まず1段目つまり横棒1本のときの確率をP1とすると下のような表となる。

$$
P1 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}
$$

2段目のとき

$$
1\to1\text{に移る確率} = \left.\begin{array}{l} 1\to1\to1 \\ 1\to2\to1 \\ 1\to3\to1 \\ 1\to4\to1 \\ 1\to5\to1 \end{array}\right\}\text{のそれぞれの確率の和がP2となる}
$$

$$
\begin{array}{ccccc} 1\to1 & 1\to2 & 1\to3 & 1\to4 & 1\to5 \end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}
\times
\begin{array}{c} 1\to1 \\ 2\to1 \\ 3\to1 \\ 4\to1 \\ 5\to1 \end{array}
\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 5/8 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 3/8 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/8 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 5/8 \end{pmatrix} = P2
$$

$$
1\to1\times1\to1 + 1\to2\times2\to1 + 1\to3\times3\to1 + 1\to4\times4\to1 + 1\to5\times5\to1
$$

このようにしてP2ができる。

私たちが考えるのは横棒10本、つまりP10なので

P2＝P1×P1

P3＝P1×P2

P5＝P2×P3

P10＝P5×P5

このようにしていっきにP10を作ることができる。

（2） 結果

P10　　出発点

終着点		①	②	③	④	⑤
	①	0.336	0.281	0.195	0.117	0.071
	②	0.281	0.251	0.202	0.150	0.117
	③	0.195	0.202	0.206	0.202	0.195
	④	0.117	0.150	0.202	0.251	0.281
	⑤	0.071	0.117	0.195	0.281	0.336

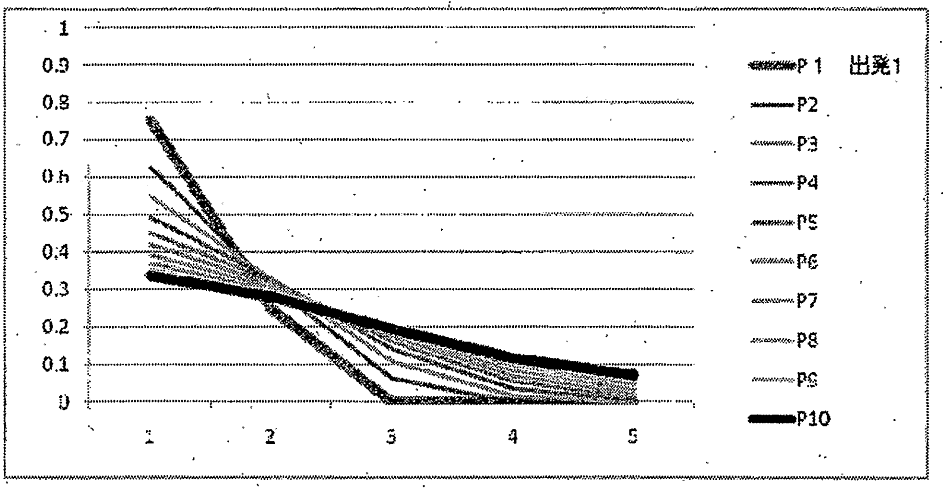
10　分析2

実験2の結果より、あみだくじは公平ではない！！ということと、真下近辺の確率が高くなるということがわかった。

ではどうすれば公平なあみだくじを作ることができるのだろう。

ここで推移確率を見てみよう。推移確率とは特定の出発点から横棒の本数を増やすごとのそれぞれの場所に行く確率である。

出発点1の推移確率



この表より、横棒が増えると確率の差が小さくなるということがわかる。

これより横棒の数をもっと増やしてみた。

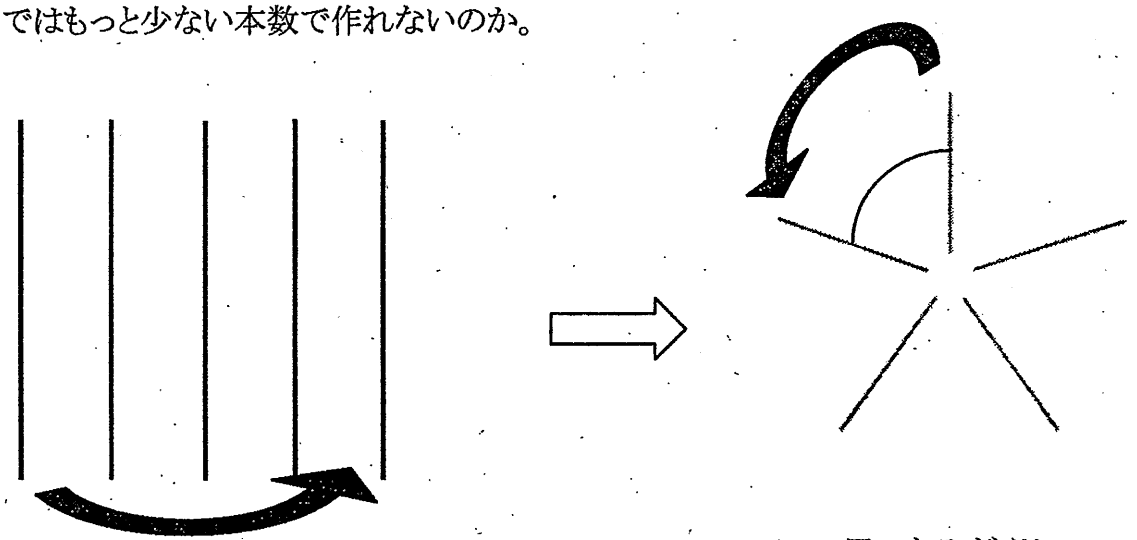
P30

	①	②	③	④	⑤
①	0.218	0.211	0.200	0.189	0.182
②	0.211	0.207	0.200	0.193	0.189
③	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
④	0.189	0.193	0.200	0.207	0.211
⑤	0.182	0.189	0.200	0.211	0.218

P50

	①	②	③	④	⑤
①	0.202	0.201	0.200	0.199	0.198
②	0.201	0.201	0.200	0.199	0.199
③	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
④	0.199	0.199	0.200	0.201	0.201
⑤	0.198	0.199	0.200	0.201	0.202

横棒50本でほぼ等しくなるが、日常では利用しにくい。
ではもっと少ない本数で作れないのか。



普通のあみだくじ　　　円のあみだくじ

今までの実験で、普通のあみだくじは端から端に行きにくいことがわかった。そこで右図のような円のあみだくじならば一番確率の低い端にも行くようになるのではないかと考えた。

11　円のあみだくじ

(1)作り方

普通のあみだくじと同様に乱数表を用いてあみだくじを作る。

(例) ８ ５ ２ ６ ０

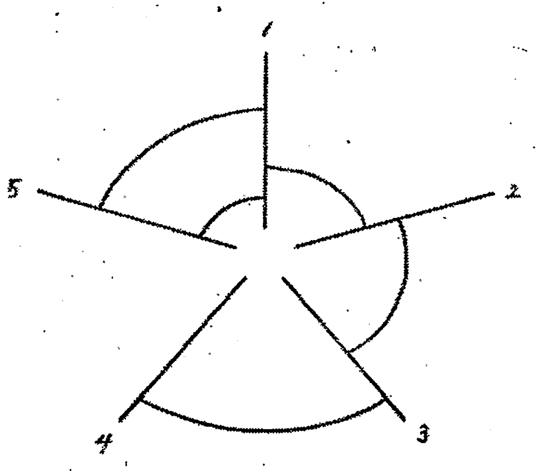
⇩ 5で割った余り

３ ０ ２ １ ０

⇩

置換 (3, 4) (5, 1) (2, 3) (1, 2) (5, 1)

この場合このようなあみだくじとなる



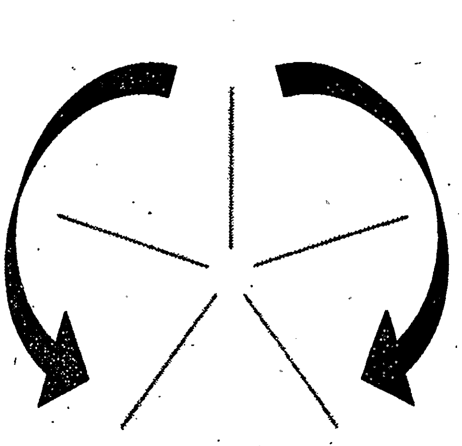
12 行列を使った円形のあみだくじの確率

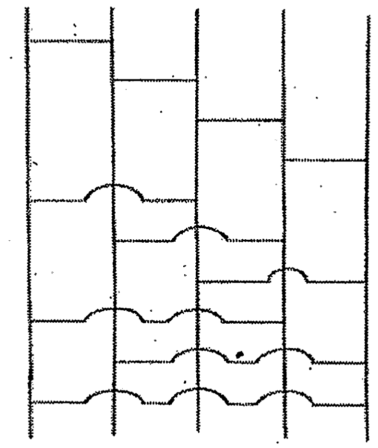
P10 出発点

終着点	①	②	③	④	⑤
①	0.216	0.205	0.187	0.187	0.205
②	0.205	0.216	0.205	0.187	0.187
③	0.187	0.205	0.216	0.205	0.187
④	0.187	0.187	0.205	0.216	0.205
⑤	0.205	0.187	0.187	0.205	0.216

普通のあみだくじよりも均等な確率になるが、まだ公平とは言い難い。円形のあみだくじは横棒約30本で公平になる。これも日常では利用しにくい。

ではもっと少ない本数で作れないのか。





円のあみだくじ　　　　　　　　　　　　　　　　　　飛び越えるあみだくじ

今までの実験で円のあみだくじは離れた2か所に行きにくいことがわかった。そこで右図のような飛び越えるあみだくじを作り、すべての場所に移動できるようにした。

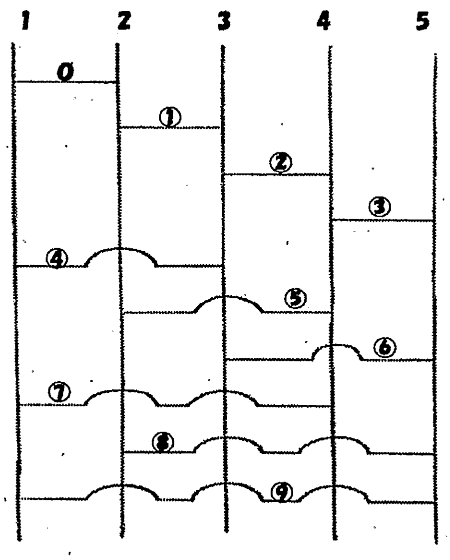
13　実験3

(1)飛び越えるあみだくじの作り方

乱数表を使って100個のあみだくじを作った。

乱数表

0	→	置換（1，2）	…0
1	→	置換（2，3）	…①
2	→	置換（3，4）	…②
3	→	置換（4，5）	…③
4	→	置換（1，3）	…④
5	→	置換（2，4）	…⑤
6	→	置換（3，5）	…⑥
7	→	置換（1，4）	…⑦
8	→	置換（2，5）	…⑧
9	→	置換（1，5）	…⑨

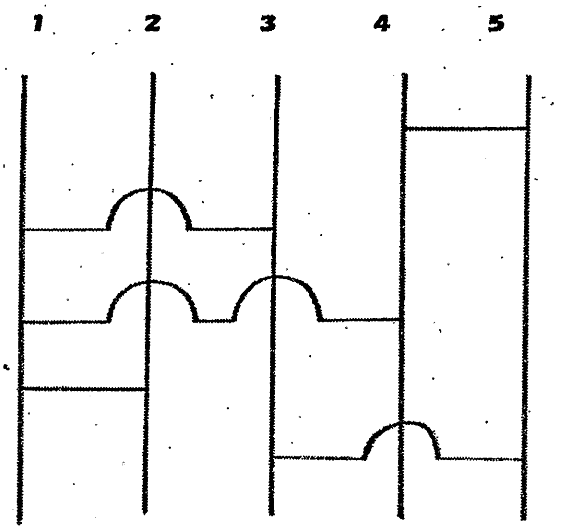


（例）3　4　7　0　6

⇩

置換　(4, 5) (1, 3) (1, 4) (1, 2) (3, 5)

この場合このようなあみだくじとなる。



(2)結果

出発点

終着点	①	②	③	④	⑤
①	13	14	28	25	20
②	19	23	18	20	20
③	20	23	20	15	22
④	23	22	18	22	15
⑤	25	18	16	18	23

通常のあみだくじに比べて、出発点から離れているところに到達する頻度が高い。

(3)行列を使った飛び越えるあみだくじの確率

$$P1 = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 3/5 & 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/10 & 3/5 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 3/5 & 1/10 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 3/5 \end{pmatrix}$$

P10　出発点

終着点	①	②	③	④	⑤
①	0.201	0.200	0.200	0.200	0.200
②	0.200	0.201	0.200	0.200	0.200
③	0.200	0.200	0.201	0.200	0.200
④	0.200	0.200	0.200	0.201	0.200
⑤	0.200	0.200	0.200	0.200	0.201

(4)分析

横棒10本でもほぼ公平なあみだくじが作れる。

14 まとめ

普通のあみだくじは公平ではない。そして公平なあみだくじを作る方法として①横棒を増やす ②飛び越えるあみだくじを使うことである。

15 感想

小橋:あみだくじを作ったり確率を計算したりするのは大変だったけどとても楽しかった。自分たちの身の回りにたくさん数学が使われていることを知り、物の見方が少し変わった。あみだくじの他にも数学が使われているものがたくさんあるので調べてみたいと思った。

大嶋:今回私たちが調べた確率は分子の拡散の仕方などにも利用されているようなので、それらのこともこれから興味を持っていきたい。

藤重:この研究で自分たちが授業で学習してきたことを使って実験を行うことができ、今までやってきたことは無駄ではないことがわかった。実験の結果を分析し改善策を考えるは難しかったが最終的に公平なあみだくじを作ることができたのでよかった。

林:今回あみだくじについていろいろと調べることができてよかった。今まで利用していたものは公平なくじではないことを知り、これからは私たちが調べたような公平なあみだくじを利用したいと思う。

飯尾:あみだくじの公平さについて学ぶことができた。普段の生活でも円形のあみだくじや飛び越えるあみだくじを利用していきたいと思った。